Николай Вавилов

ВЫСШИЕ ЗАКОНЫ КОМПОЗИЦИИ

В замечательном цикле работ 2004–2008 годов, за который ему была присуждена Филдсовская премия на ICM-2014 в Сеуле, Манджул Бхаргава дал новые истолкования закона композиции Гаусса бинарных квадратичных форм и построил несколько новых таких законов, в том числе высшие законы, степеней 3 и 4.

Одним из спектакулярных следствий его результатов является полная классификация колец степени 4 и 5, т.е. колец, аддитивная группа которых изоморфна $\mathbf{Z}^4$ или $\mathbf{Z}^5$. Напомним, что квадратичные кольца классифицировал Гаусс в 1800 году, а кубические — Делоне и Фаддеев в 1940 году.

В 2007 году Сергей Крутелевич единообразно объяснил и систематизировал квадратичные законы композиции в терминах кубических йордановых алгебр. До самого последнего времени аналогичное систематическое объяснение высших законов отсутствовало.

В первой, элементарной, половине спецкурса предполагается изложить подход Бхаргавы к композиции Гаусса и простейшие результаты о высших законах композиции, вплоть до классификации колец, аддитивная группа которых равна $\mathbf{Z}^2$, $\mathbf{Z}^3$, $\mathbf{Z}^4$ или $\mathbf{Z}^5$, и их групп классов. Эта часть предполагает, по-существу, лишь знакомство с понятиями кольца и идеала и основами линейной алгебры и будет доступна студентам 1-го и 2-го курса, хотя многие результаты окажутся новыми и для специалистов по теории чисел.

В несколько более продвинутой второй части планируется обсудить связь законов композиции Бхаргава степеней 3, 4 и 5 с исключительными группами, построить несколько дальнейших таких законов и предсказать еще один закон композиции, степени 6, связанный с группой типа E_8, который позволит классифицировать кольца с аддитивной группой $\mathbf{Z}^6$.

С этой точки зрения закон композиции Гаусса отвечает группе SO(3,$\mathbf{Z}$). Конечно, написать для высших законов явные формулы, аналогичные закону композиции Гаусса в форме Дирихле, можно только с помощью компьютера. Уже дискриминант 2x2x2x2-куба (известный как гипердетерминант Кэли), возникающий при записи квадратичного закона композиции в столь крошечной группе как Spin(8,$\mathbf{Z}$), содержит миллионы слагаемых.

Кроме того, Бхаргава работает исключительно над $\mathbf{Z}$. Получить аналогичные результаты над общим коммутативным кольцом R совершенно нетривиально. В отсутствие полиномиальных инвариантов (иными словами, для законов степени 1) это в точности работы Суслина, Васерштейна, ван дер Каллена и последующие работы Рао и его учеников об операциях на орбитах унимодулярных векторов, высших символах Меннике и т.д. Известно, что уже линейные законы можно строить только в случае, когда R удовлетворяет подходящим условиям стабильности.

Здесь открывается **огромное** поле исследований на пересечении классической теории чисел, теории инвариантов, теории алгебраических групп, теории колец, алгебраической K-теории и компьютерной алгебры. Вероятно, роль высших законов композиции в математике еще гораздо шире. Например, закон 2x2x2-куба Бхаргава представляет собой условие интегрируемости некоторого типа дискретных динамических систем.

Спецкурс будет проходить в аудитории 413 Лаборатории Чебышева (14 линия В.О., дом 29Б) по четвергам в 19.00, первая лекция 01 октября 2015.