Задачи по теории гомологий

Максим Карев, Лёша Пак
max.karev@gmail.com, pak@fizmatclub.spb.ru

16 декабря 2006 г.

Задача 1. Покажите, что индуцированная короткой точной последовательностью комплексов точная последовательность гомологий является естественной в следующем смысле: если в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B_* \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widetilde{A}_* \arrow[r, "\tilde{f}"] & \widetilde{B}_* \arrow[r, "\tilde{g}"] & \widetilde{C}_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$

вертикальные стрелки — морфизмы комплексов, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\delta"] & H_i(A_*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_i(B_*) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_i(C_*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{i+1}(A_*) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta"] & H_i(\widetilde{A}_*) \arrow[r, "\tilde{f}_*"] & H_i(\widetilde{B}_*) \arrow[r, "\tilde{g}_*"] & H_i(\widetilde{C}_*) \arrow[r, "\delta"] & H_{i+1}(\widetilde{A}_*) \arrow[r, "\tilde{f}_*"] & \cdots \end{tikzcd} \tag{2}$$

Задача 2. Останется ли верной лемма о 5 гомоморфизмах, если все квадраты в диаграмме коммутативны с точностью до знака?

Задача 3. Пусть C_i — комплекс конечномерных векторных пространств, почти все из которых тривиальны, H_* — его гомологии. Покажите, что $\sum_i (-1)^i \dim C_i = \sum_i (-1)^i \dim H_i$.

Число $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \mathrm{rank} H_i(X, \mathbb{Z})$ называется *эйлеровой характеристикой* X.

Задача 4. Пусть $H_*(X, \mathbb{Z})$ конечно порождена. Покажите, что $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim H_i(X, k)$ для любого поля k.

Задача 5. Пусть X_1, X_2 — конечные симплициальные комплексы. Покажите, что $\chi(X_1 \times X_2) = \chi(X_1)\chi(X_2)$.

Задача 6. Пусть X — конечный сиплициальный комплекс, а X_1, X_2 — его подкомплексы. Покажите, что $\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2)$.

Задача 7. Покажите, что комплекс конечно порожденных свободных абелевых групп расщепляется в сумму комплексов вида $0 \to \mathbb{Z} \to 0$ и $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to 0$, где морфизм n — умножение на $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. Сформулируйте и докажите свойство гомотопической инвариантности относительных сингулярных гомологий.

Задача 9. Пусть X — линейно связное пространство. Покажите, что группа $H_1(X, \mathbb{Z})$ изоморфна фактору фундаментальной группы X по коммутанту (подгруппе, порожденной элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$).

Задача 10. Покажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса не является ее ретрактом.

Задача 11. Вычислите целочисленные гомологии сферы с g ручками и гомологии связной замкнутой поверхности (не обязательно ориентируемой) с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 12. Стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3$ сфера с g ручками ограничивает компакт, называемый *телом с g ручками*. Склеим два экземпляра тела с g ручками по тождественному отображению границ. Вычислите целочисленные гомологии полученного пространства.

Задача 13. Вычислите целочисленные гомологии пространства обратимых вещественных матриц 3×3.

Задача 14. Вычислите целочисленные гомологии пространств единичных касательных векторов к S^1, S^2 и S^3.

Напомним, что индуцированный отображением $f : S^n \to S^n$ морфизм $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ является умножением на целое число. Это число называется *степенью отображения* f.

Задача 15. Пусть $f : S^n \to S^n$ — гомеоморфизм. Покажите, что f имеет степень 1 или -1.

Задача 16. Постройте отображение $f : S^n \to S^n$ степени k, где $n \geq 2$.

Задача 17. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — полином; f продолжается до отображения $\overline{f} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ сферы Римана в себя. Вычислите степень $\overline{f}$.

Задача 18. Пусть X покрывается такими n открытыми множествами X_a, что X_a, $X_{ab} = X_a \cap X_b$, $X_{abc} = X_a \cap X_b \cap X_c$ и так далее либо пусты, либо стягиваемы для всевозможных индексов. Найдите такое N, что $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ при $i \geq N$. Желательно найти наилучшее N.

Задача 19. Вычислите кольцо когомологий двумерного тора с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 20. Вычислите кольцо целочисленных когомологий сферы с g ручками.