Задачи по теории представлений

(с фрагментами самой теории)

В этом тексте используются следующие соглашения и обозначения.

Вместо конкретных представлений какой-либо группы мы будем рассматривать классы эквивалентных представлений этой группы, каждый из которых отождествляется с некоторым представителем этого класса.

Пусть G — конечная группа, π — представление группы G.

Через V^π обозначим векторное пространство, в котором действует представление π, (это пространство и действие в нём группы G определены с точностью до изоморфизма), через $\dim\pi$ — размерность π, а через χ_π — характер π ($\dim\pi$ и χ_π зависят только от класса эквивалентности π).

Спектр $\sigma(G)$ группы G — множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы G.

Группа окружности $\mathbb{T}$ — группа $\{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|=1\}$, группа корней m-ой степени из единицы μ_m — группа $\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda^m=1\}$ — подгруппа $\mathbb{T}$.

1 О характерах

В этом пункте G — конечная группа, π — представление группы G.

Задача 1.1. *Докажите, что характер χ_π — неотрицательно определённая функция на группе G, то есть для всякого числа $n\in\mathbb{N}$, любых элементов $g_1,\dots,g_n\in G$ и чисел $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{C}$ выполнено*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\chi_\pi(g_i\,{g_j}^{-1})\,t_i\,\overline{t_j}\ \geqslant 0.$$

Задача 1.2. *Докажите, что*

$$\forall\, g\in G\ \ (g^2=e\implies\chi_\pi(g)\ -\ \textit{целое число}).$$

Задача 1.3. *Докажите, что*

$$\forall\, g\in G\ \ (|\chi_\pi(g)|=\chi_\pi(1)\iff\pi(g)\ -\ \textit{скалярный оператор}).$$

Задача 1.4. *Докажите, что*

$$\operatorname{Ker}\pi=\{g\in G\mid\chi_\pi(g)=\chi_\pi(1)\}.$$

Задача 1.5. *Пусть π — неприводимое представление группы G, то есть $\pi\in\sigma(G)$, а z — элемент центра этой группы, причём $z^m=e$ для $m\in\mathbb{N}$. Докажите, что тогда*

$$\exists\,\lambda\in\mu_m\ \forall\, g\in G\ \ (\chi_\pi(zg)=\lambda\,\chi_\pi(g)).$$

2 Представления фактор-групп, одномерные и точные представления

В этом пункте G — конечная группа, H — нормальная подгруппа в G.

Задача 2.1. *Пусть $\pi \in \sigma(G)$, причём $H \leqslant \operatorname{Ker} \pi$. Определим представление $\overline{\pi}$ фактор-группы G/H в пространстве V^π по формуле: $\overline{\pi}(gH) = \pi(g)$ для всякого $gH \in G/H$. Докажите, что тогда*

а) $\overline{\pi}$ — корректно определённое представление группы G/H, кроме того, это представление неприводимо, то есть $\overline{\pi} \in \sigma(G/H)$;

б) отображение $\pi \longmapsto \overline{\pi}$ между множествами $\{\pi \in \sigma(G) \mid H \leqslant \operatorname{Ker} \pi\}$ и $\sigma(G/H)$ — биекция.

Из этой задачи можно сделать вывод: описание неприводимых представлений группы, ядро которых содержит нормальную подгруппу, сводится к описанию неприводимых представлений фактор-группы по этой подгруппе.

Задача 2.2. *Пусть $[G, G]$ — коммутант группы G, то есть подгруппа, порождённая всеми коммутаторами в G. Докажите, что тогда*

а) $[G, G]$ — нормальная подгруппа в G;

б) $\{\pi \in \sigma(G) \mid [G, G] \leqslant \operatorname{Ker} \pi\} = \{\pi \in \sigma(G) \mid \dim \pi = 1\}$.

Из этой задачи, совместно с предыдущей, мы получаем, что одномерные неприводимые представления группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с неприводимыми представлениями фактор-группы по коммутанту, а это абелева группа.

Задача 2.3. *Пусть G — неабелева группа. Докажите, что тогда любое двумерное точное представление группы G неприводимо.*

Указание. Воспользуйтесь теоремой Машке.

Задача 2.4. *Пусть группа G имеет точное неприводимое представление. Докажите, что тогда центр группы G — циклическая группа.*

3 Об абелевых группах

В этом пункте A — (не обязательно конечная) абелева группа.

Задача 3.1. *Определим представление π группы $\mathbb{Z}$ в пространстве $\mathbb{C}^2$ по формуле: $\pi(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что тогда π содержит единственное нетривиальное подпредставление.*

Таким образом, π — приводимое, но неразложимое представление группы $\mathbb{Z}$, то есть π содержит нетривиальное подпредставление, но π нельзя разложить в прямую сумму нетривиальных подпредставлений.

Задача 3.2. *Пусть π — n-мерное представление группы A. Докажите, что тогда π содержит одномерное и $(n-1)$-мерное подпредставления.*

Отсюда мы получаем, что неприводимые представления абелевых групп одномерны, но в случае бесконечных групп произвольное представление не всегда можно разложить в прямую сумму одномерных подпредставлений.

Определение. Рассмотрим множество

$$A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{T}) =$$
$$= \{\varphi\colon A \to \mathbb{T} \mid \forall\, a_1, a_2 \in A \ \ (\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1)\,\varphi(a_2))\}.$$

Определим на A^* поточечные групповые операции:

$$(\varphi_1\varphi_2)(a) = \varphi_1(a)\,\varphi_2(a), \quad (\frac{1}{\varphi})(a) = \frac{1}{\varphi(a)}, \quad 1(a) = 1.$$

Эти операции задают на A^* структуру абелевой группы. Группа A^* — дуальная группа абелевой группы A.

Всякое унитарное неприводимое представление группы A одномерно и, значит, является гомоморфизмом групп между A и $U(1) = \mathbb{T}$, поэтому A^* есть в точности множество унитарных неприводимых представлений A.

Задача 3.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $C_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — циклическая группа из m элементов. Докажите, что тогда $(C_m)^* \cong \mu_m$.*

Задача 3.4. *Пусть A — конечная абелева группа. Опишите группу дуальную группу A^* с помощью групп $\{\mu_m \mid m \in \mathbb{N}\}$.*

Указание. Воспользуйтесь тем, что конечная абелева группа есть прямая сумма конечных циклических групп.

Из этой задачи мы получаем, что в случае конечной абелевой группы A группы A и A^* изоморфны, но этот изоморфизм не канонический, так как зависит от выбора образующих в циклических компонентах группы A.

Задача 3.5. *Докажите, что $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{T}$.*

Отсюда A и A^* не всегда изоморфны в случае бесконечной группы A.

Определение. Определим гомоморфизм групп $\iota\colon a \longmapsto \iota_a$ между группами A и $\mathrm{Hom}(A^*, \mathbb{T})$ по формуле: $\iota_a(\varphi) = \varphi(a)$ для всех $a \in A$ и $\varphi \in A^*$.

Задача 3.6. *Докажите, что*

а) если A — конечная абелева группа, то ι — канонический изоморфизм между группой A и дважды дуальной группой $A^{**} = \mathrm{Hom}(A^*, \mathbb{T})$;

б) если A — произвольная абелева группа, то ι — мономорфизм.

Указание. Пункт а) легко следует из описания дуальной группы конечной абелевой группы. В пункте б) нужно воспользоваться леммой Цорна.

Всюду далее A — не более, чем счётная абелева группа.

Определение. Определим на дуальной группе A^* топологию с помощью определения сходимости последовательностей:

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, a \in A \ \ (\varphi_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(a)).$$

Эта топология задаёт на A^* структуру топологической абелевой группы.

Задача 3.7. *Докажите, что если A — конечная абелева группа, то топология дуальной группы A^* дискретна.*

Задача 3.8. *Докажите, что топология группы $\mathbb{T}$ как дуальной группы к $\mathbb{Z}$ совпадает со стандартной топологией на $\mathbb{T}$.*

Определение. Дважды дуальная группа A^{**} не более, чем счётной абелевой группы A — группа непрерывных гомоморфизмов между A^* и $\mathbb{T}$:

$$A^{**} = C^0(A^*, \mathbb{T}) \cap \mathrm{Hom}(A^*, \mathbb{T}).$$

Задача 3.9. *Докажите, что $\iota(A) \leqslant A^{**}$, то есть все гомоморфизмы ι_a, $a \in A$, непрерывны.*

Таким образом, ι — мономорфизм между группами A и A^{**}.

Выше мы получили, что если A — конечная абелева группа, то ι — изоморфизм между A и A^{**}. Двойственность Понтрягина для счётных абелевых групп состоит в том, что ι — изоморфизм между A и A^{**}, если A — счётная абелева группа. Это утверждение довольно сложное: его доказательство использует несколько нетривиальных фактов функционального анализа. Но в случае некоторых конкретных групп A двойственность Понтрягина можно доказать непосредственно.

Задача 3.10. *Докажите двойственность Понтрягина для группы $\mathbb{Z}$, то есть проверьте, что всякий непрерывный гомоморфизм между $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}$ — это возведение в степень $z \longmapsto z^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.*

Указание. Воспользуйтесь тем, что множество $\iota(\mathbb{Z}) = \{z \longmapsto z^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — полная ортонормированная система в пространстве $L^2(\mathbb{T})$, и рассмотрите коэффициенты в разложении данного непрерывного гомоморфизма $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ в ряд Фурье по этой системе.