Занятие 2.

Графы с большим обхватом и большим хроматическим числом
Большие независимые множества в графах без треугольников
Графы-расширители

Сегодня мы познакомимся с тремя классическими результатами теории графов, получить которые проще всего, пользуясь вероятностными методами.

Пусть G — неориентированный граф без петель и кратных ребер на n вершинах. Напомним, что раскраска вершин графа G называется *правильной*, если соединенные ребром вершины имеют разные цвета. Определим *хроматическое число* $\chi(G)$ графа G как наименьшее количество цветов, необходимое для правильной покраски вершин графа G. Через $\alpha(G)$ обозначим размер максимальной антиклики (пустого подграфа) в графе G. Очевидно, что

$$\alpha(G) \geq n/\chi(G), \tag{1}$$

поскольку при правильной покраске вершины каждого цвета образуют антиклику. *Обхватом* $\mathrm{girth}(G)$ графа G назовем длину наименьшего простого цикла в G (обхват леса не определен, но он нас интересовать не будет).

Долгое время стоял вопрос о существовании графов с большим обхватом и большим хроматическим числом.

Приведенная ниже конструкция, принадлежащая Эрдешу, показывает существование графов с большим обхватом без больших антиклик, что в силу (1) является более сильным свойством.

Возьмем n вершин и будем проводить ребро между любыми двумя вершинами с данной вероятностью p, все ребра проводятся или не проводятся независимо. Случайный граф, определяемый таким образом, назовем $G(n, p)$.

Зафиксируем k и будем пытаться построить случайный граф без циклов длины, не большей k (назовем их короткими). Выберем $p = n^{\theta-1}$, где $0 < \theta < 1/k$. Оценим математическое ожидание количества коротких циклов. Для каждого l, $3 \leq l \leq k$ имеется $n(n-1)\dots(n-l+1)/(2l)$ возможных циклов длины l, вероятность каждого равна $p^l = n^{l\theta-l}$. Таким образом, математическое ожидание количества циклов длины l равно

$$\sum_{l=3}^{k} \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{2l} n^{l\theta-l} < kn^{k\theta} < n/4$$

при больших n. Таким образом, с вероятностью хотя бы $1/2$ количество коротких циклов не превосходит $n/2$ (иначе бы матемтаическое ожидание их количества было бы не меньше $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} = n/4$.

Теперь оценим вероятность наличия большой антиклики.

Зафиксируем $m < n$. Количество способов выбрать множество из m вершин антиклики равно $C_n^m < 2^n$. Для каждого такого множества вероятность того, что между его вершинами не проведено ребер, равна $(1-p)^{C_m^2}$. Воспользуемся полезной оценкой $1 - p < e^{-p}$ и получим, что вероятность наличия антиклики размера m не превосходят

$$2^n e^{-pC_m^2} < e^{n-pm^2/3} = e^{n(1-\frac{1}{3}n^\theta m^2/n^2)}$$

Таким образом, при $m_0 = [100n^{1-\theta/2}]$ и большом n вероятность наличия в графе $G(n,p)$ антиклики размера m_0 будет меньше $1/2$ — стало быть, хроматическое число с вероятностью больше чем $1/2$ будет не меньше чем $n^{\theta/2}/100 \to \infty$.

Итак, с вероятностью большей половины в графе $G(n,p)$ нет антиклик мощности m_0; также с вероятностью большей половины в нем не более чем $n/2$ коротких циклов. Значит, с положительной вероятностью выполняются оба описанных события. Выкидывая по вершине из каждого короткого цикла получаем граф не менее чем с $n/2$ вершинами, в котором нет коротких циклов и нет антиклик размера $m_0 = o(n/2)$.

Перейдем к следующему сюжету.

Если степени всех вершин графа на n вершинах не превосходят d, в нем легко найти антиклику размера $n/(d+1)$. Например, годится жадный алгоритм: если $k < n/(d+1)$ попарно несоединенных вершин уже найдено, то всегда можно добавить еще одну.

Оказывается, что для графов без треугольников эта оценка может быть значительно улучшена.

Теорема. В графе без треугольников на n вершинах, степени которых не превосходят $d > 100$, найдется антиклика мощности хотя бы $\frac{n \log d}{4d}$.

Доказательство использует весьма хитроумные вероятностные соображения. Выберем случайно антиклику X в нашем графе (все антиклики равновероятны). Для каждой вершины v нашего графа G определим случайную величину

$$\xi_v = d \cdot |\{v\} \cap X| + |N(v) \cap X|,$$

где $N(v)$ — множество соседей вершины v, $|\cdot|$ обозначает мощность множества. Докажем оценку на математическое ожидание введенной величины: $E(\xi_v) \geq \log d/2$ для любой вершины v. Зафиксируем пересечение

M случайной антиклики X с множеством вершин, отличных от v и ее соседей. Достаточно доказать, что при фиксированном M условное математическое ожидание величины ξ_v не меньше заявленной оценки $\log d/4$ (поскольку полное математическое ожидание есть среднее взвешенное условных по всем возможным M). Пусть имеется x вершин в множестве $N(v)$, не соединенных ни с одной вершиной множества M. Тогда имеется $2^x + 1$ способов дополнить множество M до антиклики во всем графе: либо добавить к M вершину v, либо добавить некоторое подмножество этих x вершин (именно здесь мы пользуемся отсутствием треугольников). Отсюда получаем, что условное математическое ожидание, которое нас интересует, равно

$$\frac{1}{2^x+1} \cdot d + \frac{2^x}{2^x+1} \cdot \frac{x}{2}$$

(средняя мощность случайного подмножества в x-элементном множестве очевидно равна $x/2$).

При $x \geq \log d$ второе слагаемое не меньше, чем $\log d/2$, при $x \leq \log d$ первое слагаемое не меньше, чем $d^{1-\log 2}/2$. В обоих случаях получаем требуемое.

Складывая неравенства $E(\xi_v) \geq \log d/2$ по всем вершинам v получаем, что $E(\sum_v \xi_v) \geq n \log d/2$. Значит найдется такая антиклика, что $\sum_v \xi_v \geq n \log d/2$. Пусть она содержит k вершин. Тогда значение случайной величины $\sum_v \xi_v$ равно $kd+$(сумма степеней вершин, входящих в эту антиклику), то есть $\leq 2kd$. Отсюда $k \geq \frac{n \log d}{4d}$, что и требовалось.

Перейдем к третьему примеру — вероятностной конструкции графов-расширителей. Двудольный граф с долями по n вершин и максимальной степенью $\leq d$ назовем (n, d, c)-расширителем $(1 < c < 2)$, если любые $k \leq n/2$ вершин графа G из одной доли имеют в совокупности хотя бы ck соседей.

Не борясь за значения констант, предъявим вероятностную конструкцию $(n, 100, 3/2)$-расширителя.

Пусть вершины первой доли суть $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$; второй — $B_1,\ B_2, \ldots, B_n$. Выберем случайно и независимо перестановки $\pi_1,\ \pi_2, \ldots, \pi_{100}$ чисел от 1 до n (все случайные перестановки имеют одинаковую вероятность $1/n!$). Соединим вершины A_i и $B_{\pi_s(i)}$ для всех $i = 1,\ 2, \ldots, n$ и $j = 1,\ 2, \ldots, 100$. При необходимости удалим кратные ребра.

Получим случайный граф, степени всех вершин которого не больше ста. Оценим вероятность того, что полученный граф не является расширителем. Это значит, что найдутся множества из k (синих) вершин в первой доле и $t = [3k/2]$ (красных) вершин — во второй такие, что значения каждой из ста перестановок π_i на синих вершинах являются красными (мы позволяем себе некоторую вольность речи, путая вершины и их индексы). Если зафиксировать синие и красные вершины, то для каждой перестановки вероятность указанного события равна

$$\frac{t}{n} \cdot \frac{t-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{t-k+1}{n-k+1} \leq \left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

Суммируя по всем выборам красных и синих вершин и вспоминая, что перестановок у нас 100, получаем оценку на искомую вероятность p не быть расширителем:

$$p \leq \sum_{k=1}^{[n/2]} C_n^k C_n^{[3k/2]} \left(\frac{3k}{2n}\right)^{100k}$$

Заметим, что $C_n^k \leq n^k/k! \leq (n/k)^k e^k$. Поскольку $\frac{3k}{2n} \leq 3/4$, получаем

$$p \leq \sum_{k=1}^{[n/2]} (3/2)^k e^{5k/2} (3/4)^{95k} < 1.$$