Занятие 3.

Локальная лемма Ласло Ловаса.

Если события $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ взаимно независимы и вероятность каждого меньше 1, то с положительной вероятностью ни одно из них не происходит.

Локальная лемма Ловаса (1975) обобщает это наблюдение на случай "не сильно зависимых" событий и имеет множество подчас неожиданных применений.

Для семейства событий $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ построим **орграф зависимостей** следующим образом: вершинами этого графа будут события A_i, а множество событий $N_+(A_i)$, в которые ведут стрелки из события A_i, таково, что A_i не зависит от всех событий, кроме событий, входящих в множество $N_+(A_i)$. Это означает, что для любого события B, выражаемого через множество событий $\{A_j, j\notin N_+(A_i)\}$, события A_i и B независимы. Через $\bar{A}$ будем обозначать дополнение события A.

Локальная лемма. Предположим, что нашлись такие числа $x_i\in(0,1)$, что для всех i выполняется неравенство $p(A_i)\le x_i\prod_{j\in N_+(A_i)}(1-x_j)$. Тогда $p(\bigcap \bar{A}_i)\ge\prod(1-x_i)$ — в частности, с положительной вероятностью ни одно из событий A_i не происходит.

Доказательство. Докажем более сильное утверждение: если $I = I_1\sqcup I_2$, где I_1, I_2 — множества индексов, то

$$p\left(\bigcap_{i\in I}\bar{A}_i\right)\ge p\left(\bigcap_{i\in I_2}\bar{A}_i\right)\cdot\prod_{j\in I_1}(1-x_j).$$

Для пустого I_2 получаем требуемое. Докажем индукцией по $|I|$. Если $|I|=1$, то при $I_2=I$, $I_1=\emptyset$ имеет место равенство, а при $I_1=I$, $I_2=\emptyset$ имеем $p(\bar{A}_i)=1-p(A_i)\ge 1-x_i$. Теперь предположим, что для всех множеств индексов мощности меньше $|I|$ и любых их подразбиения на два подмножества неравенство имеет место. Докажем его для I. Рассмотрим сначала случай $|I_1|=1$, $I_1=\{k\}$. Обозначим $p(\bigcap_{i\in I_2}\bar{A}_i)=p_0$. Имеем

$$p\left(\bigcap_{i\in I}\bar{A}_i\right)=p_0-p\left(\bigcap_{i\in I_2}\bar{A}_i\bigcap A_k\right)\ge p_0-p\left(\bigcap_{i\in I_2\setminus N_+(A_k)}\bar{A}_i\bigcap A_k\right)=$$

$$p_0-p\left(\bigcap_{i\in I_2\setminus N_+(A_k)}\bar{A}_i\right)p(A_k)\ge p_0(1-x_k).$$

Чтобы проверить выполнение последнего неравенства, перепишем его в равносильном виде

$$p_0 x_k \geq p\left(\bigcap_{i\in I_2\setminus N_+(A_k)} \bar{A}_i\right) p(A_k).$$

Это неравенство следует из оценки $p(A_k) \leq x_k \prod_{j\in N_+(A_k)}(1-x_j)$ и индукционного предположения.

Пусть теперь $I_1 = \{k\} \sqcup I_3$, $|I_3| > 0$. Имеем

$$p\left(\bigcap_{i\in I} \bar{A}_i\right) \geq p\left(\bigcap_{i\in I_2\cup I_3} \bar{A}_i\right)(1-x_k) \geq p\left(\bigcap_{i\in I_2} \bar{A}_i\right)(1-x_k)\prod_{j\in I_3}(1-x_j),$$

что и требовалось (здесь первое неравенство уже доказано, а второе следует из индукционного предположения).

Доказательство леммы таким образом завершено.

Замечание. Как видно из доказательства, вместо независимости каждого события A_i от событий, не входящих в $N_+(A_i)$ достаточно требовать для любого множества I такого, что $I\bigcap(N_+(A_i)\cup\{i\}) = \emptyset$ оценки

$$p\left(A_i | \bigcap_{j\in I} A_j\right) \leq x_i \prod_{j\in N_+(A_i)}(1-x_j).$$

Иногда используется именно такая версия локальной леммы.

В случае, когда оценки на вероятности всех событий совпадают, получаем следующее утверждение, известное как

Симметричная версия локальной леммы. Предположим, что $ep(d+1) \leq 1$, каждое событие A_i происходит с вероятностью не больше, чем p и исходящая степень каждого события в орграфе зависимостей не больше d. Тогда с положительной вероятностью ни одно событие A_i не происходит.

Доказательство. Выберем $x_i = x = 1/(d+1)$. Тогда $(1-x)^d \geq 1/e$ — это следует, например, из определения числа e. Тогда $p \leq x(1-x)^d$, так что выполняются условия локальной леммы.

Перейдем к применениям локальной леммы.

Предложение. Пусть G — граф, степени всех которого не больше d, P_i — непересекающиеся подмножества множества вершин графа G такие, что $|P_i| > 2ed$. Тогда можно выбрать в каждом P_i по вершине так, что никакие две соединенные ребром вершины не выбраны.

Доказательство. Уменьшим при необходимости некоторые P_i так, чтобы для всякого i было $|P_i| = k := [2ed] + 1$. Будем выбирать вершины $x_i \in P_i$ случайно и независимо. Каждому ребру $e = v_1 - v_2$ графа G сопоставим *событие* A_e: оба конца v_1, v_2 этого ребра выбраны. Очевидно, что вероятность каждого такого события не больше, чем $1/k^2$. В случае, если концы ребра принадлежат одному и тому же P_i или один из них не принадлежит ни одному P_i, вероятность равна 0 и такие события мы далее не рассматриваем. Для ребра $e = v_1 - v_2$, для которого, скажем $v_1 \in P_1$, $v_2 \in P_2$, рассмотрим все ребра, выходящие из вершин множеств P_1 и P_2. Всего будет не более, чем $2kd - 2$ таких ребер (не считая ребра e). Заметим, что событие A_e не зависит от всех других событий типа $A_{e'}$, где e' — ребро, соединяющее вершины множеств, отличных от P_1 и P_2. Таким образом, для применения симметричной версии локальной леммы достаточно проверить, что $e(2kd - 1)/k^2 < 1$, что имеет место.

Пример. Пусть за круглым столом сидит по сто представителей каждой из n стран. Тогда можно выбрать в каждой стране по представителю так, чтобы никакие двое выбранных не сидели рядом.

Покажем, как локальная лемма может применяться для нижней оценки чисел Рамсея.

Попробуем доказать, что при некотором — желательно как можно большем — k при некоторой покраске ребер полного графа на k вершинах в красный и синий цвета не найдется ни синего треугольника, ни красного полного подграфа на n вершинах (это будет означать, что $R(3, n) \geq k$).

Будем красить ребро в синий цвет с вероятностью p и в красный с вероятностью $1-p$. Для каждого треугольника рассмотрим событие “все его ребра синие”, а для каждых n вершин событие “все ребра между этими вершинами красные”. Мы хотим, чтобы с положительной вероятностью ни одно из этих событий не произошло. Попробуем применить локальную лемму. Заметим, что два события зависимы, если соответствующие множества из трех либо n вершин пересекаются хотя бы по двум элементам. Так что каждое “синее” событие зависит не больше чем от $3(k-3)$ синих и C_k^n красных (последнее число можно чуть уменьшить, но пользы такое улучшение не принесет), каждое красное — не более чем от $n^2k/2$ “синих” и C_n^k красных. Теперь для применения локальной леммы следует найти числа $x_i = x$ и $y_i = y$ такие, что

$$p^3 \leq x(1-x)^{3k}(1-y)^{C_k^n},\ (1-p)^{C_n^2} \leq y(1-x)^{n^2k/2}(1-y)^{C_k^n}.$$

Утомительное вычисление показывает, что следует брать $p = c_1k^{-1/2}$, $n = c_2\sqrt{k}\log k$, $x = c_3k^{-3/2}$, $y = c_4e^{-\sqrt{n}\log^2 n}$.

Это дает оценку $R(3,n) > cn^2/\log^2 n$. В действительности $R(3,n)$ растет как $cn^2/\log n$, что было выяснено в результате многолетнего труда многих математиков.

Перейдем к следующему сюжету. Он интересен тем, что локальная лемма для установления результата применяется дважды в совершенно различных ситуациях.

Линейным лесом назовем граф, каждая компонента связности которого есть простая цепь. *Линейная древесность* $\mathrm{la}(G)$ графа G есть наименьшее количество линейных лесов, покрывающих все ребра графа G.

Гипотеза линейной древесности (Akiyama, Exoo и Harary, 1981) утверждает, что линейная древесность любого d-регулярного графа равна $[d/2]+1$.

Нижняя оценка очевидна, трудность состоит в том, чтобы покрыть ребра любого d-регулярного графа таким количеством линейных лесов.

Нам понадобится ориентированная версия гипотезы линейной древесности. Ориентированный граф называется линейным лесом, если каждая его компонента (слабой) связности есть ориентированная цепь. Рассмотрим ориентированный граф, в котором степени исходя и захода каждой вершины равны d — такие орграфы будем называть d-регулярными. *Ориентированная гипотеза линейной древесности* утверждает, что ребра d-регулярного орграфа можно покрыть $d+1$ линейным лесом (легко видеть, что меньшим количеством линейных лесов не обойтись).

Назовем ориентированным обхватом орграфа длину наименьшего ориентированного цикла в этом орграфе.

Для графов с большим ориентированным обхватом ориентированная гипотеза линейной древесности устанавливается в следующем утверждении:

Теорема. Если ориентированный обхват g d-регулярного орграфа G удовлетворяет неравенству $g > 8ed$, то $\mathrm{la}(G) = d+1$, то есть для такого графа выполняется ориентированная версия гипотезы линейной древесности.

Доказательство. Мы воспользуемся тем известным фактом, что ребра орграфа G можно разбить на d непересекающихся подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_d$ так, что для всякого i ребра подмножества M_i образуют 1-регулярный подграф (то есть M_i есть дизъюнктное объединение циклов). [Это следует, например, из леммы о девушках. Рассмотрим неориентированный двудольный граф, доли которого есть две копии множества вершин графа G. Проведем ребро между вершиной a первой доли и вершиной b второй доли, если в графе G было ребро из a в b. Получим d-регулярный двудольный граф. Для него выполняются условия леммы о девушках, так что найдется совершенное паросочетание. В графе G оно соответствует 1-регулярному подграфу. Дальше по индукции.]

Каждый цикл в каждом M_i содержит по предположению больше, чем $8ed$ вершин. Рассмотрим граф ребер нашего орграфа, в котором вершинами будут ребра орграфа, и соединены будут смежные ребра. Ясно, что он будет $(4d-2)$-регулярным. отсюда применяя доказанное несколько выше предложение получаем, что можно во всех этих циклах выбрать по ребру так, чтобы не было смежных выбранных ребер. Определим M_{d+1} как (вообще говоря, неполное) паросочетание, образованное этими циклами. Переопределяя $M_i := M_i \setminus M_{d+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, d$ получаем требуемое покрытие ребер графа G линейными лесами в количестве $d+1$.

Пусть G — d-регулярный орграф. Для получения безусловного результата о линейной древесности G нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого также использует локальную лемму:

Утверждение. Пусть $10\sqrt{d} < p < 20\sqrt{d}$. Тогда существует такая раскраска $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ вершин графа G в цвета $1, 2, \ldots, k$, для которой соседи всякой вершины окрашены "равномерно" — а именно, $|N_+(v) \bigcap f^{-1}(i) - d/p| < 10\sqrt{d/p}\log d$ и аналогично для $N_(v)$ при всех $v \in V(G)$.

Доказательство основано на том, что при случайной раскраске указанные события очень вероятны для каждой вершины и при этом слабо зависимы в смысле локальной леммы. Подробности опускаются.

Выберем в указанном интервале $[10\sqrt{d}, 20\sqrt{d}]$ простое p. Обозначим за E_i множество тех ориентированных ребер $v_1 - v_2$ графа G, для которых $f(v_2) - f(v_1) \equiv i$ по модулю p.

Заметим, что при $i \neq 0$ все ориентированные циклы в графе, образованном ребрами E_i, имеют длину, кратную p. Легко видеть, что выполняются условия на большой ориентированный обхват, так что для каждого $i \neq 0$ покроем соответствующие ребра не более чем $d/p + 10\sqrt{d/p}\log d + 1$ линейными лесами, при $i = 0$ покроем ребра множества E_0 $2d/p + o(d/p)$ линейными лесами (например, так: покроем $d/p + o(d/p)$ 1-регулярными графами, каждый из которых разделим на два линейных леса).

Получим покрытие всех ребер графа G линейными лесами в количестве $d + o(d)$.