Задачи по курсу "Маломерные многообразия"

С. В. Дужин

ФИЗМАТКЛУБ 2007

1. Построить клеточное разбиение и описать оператор границы для многообразия $\mathbb{R}P^3\#\mathbb{R}P^3$.

2. Задать (а) диаграммой Хегора, (б) склейкой граней набора многогранников, (в) перестройкой по зацеплению, — многообразие $K \times S^1$, где K — ориентируемая поверхность рода 2.

3. Вложение поверхности в 3-многообразие называется (одно-)двусторонним, если его нормальное расслоение (не-)тривиально. Можно ли вложить бутылку Клейна в какое-то ориентируемое 3-многообразие (а) односторонним, (б) двусторонним образом?

4. Придумать аналог разбиения Хегора для неориентируемых 3-многообразий и указать такое разбиение для многообразия $S^2\tilde{\times}S^1$ (неориентируемое расслоение над окружностью со слоем сфера).

5. Доказать, что перестройка S^3 по положительному трилистнику с оснащением $+5$ есть некоторая линза $L(p,q)$. Найти параметры p, q.

6. Задать гомологическую сферу Пуанкаре перестройкой по зацеплению, состоящему из незаузленных компонент с оснащением ± 1.

7. Дать явную конструкцию 4-многообразия W с краем $\mathbb{R}P^3$.

8. Эквивалентны ли (как целочисленные формы) формы пересечений многообразий $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ и $S^2 \times S^2$? Тот же вопрос для многообразий $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ и $(S^2 \times S^2)\#\overline{\mathbb{C}P^2}$.

9. Сосчитать инвариант Рохлина и Arf-инвариант гомологической сферы $\Sigma(2,3,7)$.

10. Перечислить однородные компактные 2-мерные римановы многообразия.

11. Какую геометрию можно ввести на внутренности многообразия Зейферта $(D^2,(2,1),(2,1))$?

12. Выписать уравнение потока Риччи для конформной метрики на 2-мерном многообразии: $g = u(x,y)(dx^2+dy^2)$. Найти в явном виде решение в случае поверхностей постоянной кривизны.