Алгебра многогранников

Г. Ю. Панина

1. Введение

Статья предназначена старшеклассникам, целенаправленно занимающимся математикой, студентам и преподавателям. Кроме того, она может быть рекомендована математикам-профессионалам в качестве легкого чтения.

Для удобства читателя мы используем двухуровневую систему: (меньшая) часть текста выделена мелким шрифтом — этот более сложный материал может быть пропущен начинающими.

А вот задачи пропускать нельзя — над ними нужно подумать (в Приложении приведены ответы и указания к некоторым задачам).

Совсем недавно была придумана замечательная вещь — алгебра многогранников. Как это иногда бывает с действительно важными конструкциями, ее придумали одновременно и независимо разные люди — Александр Пухликов совместно с Аскольдом Хованским и Питер МакМаллен (P. McMullen). И как это часто бывает, алгебра многогранников имеет отношение к разным областям математики.

Например, есть такой вариант задачи о равносоставленности: многогранник разрешается разрезать на куски, а затем, передвигая куски с помощью параллельных переносов, составить новый многогранник. (Звучит почти как третья проблема Гильберта, но смысл здесь иной). Алгебра многогранников, которую мы построим, помогает найти критерий равносоставленности для этой задачи.

С другой стороны, алгебра многогранников тесно связана с алгебраической геометрией торических многообразий. Эта «высокая наука» может быть переведена на простой и знакомый язык многогранников (так же, как делаются переводы с одного языка на другой). В соответствующем «словаре» термин «многогранник» переводится как «очень обильный пучок». «Сложение многогранников по Минковскому» переводится как «тензорное произведение пучков». Известно, что очень обильные пучки можно не только тензорно перемножать, но и делить друг на друга — они порождают группу Пикара. Если перевести последнюю фразу на язык многогранников, то получится следующее утверждение.

Выпуклые многогранники можно не только складывать, но и вычитать по Минковскому — они порождают группу виртуальных многогранников. Что это значит геометрически, будет рассказано в параграфе 6.

Более того, мы покажем, что выпуклые многогранники порождают еще более богатую структуру — градуированную алгебру (это и есть алгебра многогранников).

Говоря простым языком, по своим алгебраическим свойствам многогранники похожи на многочлены.

На примере этой красивой конструкции вы увидите, как в математике действует старая детская поговорка: «Если нельзя, но очень хочется, то можно.»

Например, нельзя вычесть по Минковскому из маленького многогранника большой. Но если придумать как, то можно.

Выражения «логарифм треугольника» и «экспонента тетраэдра» — бессмыслица. Но если проявить фантазию, то они станут осмысленными и позволят раскладывать многогранники в сумму однородных компонент.

Изложение отнюдь не претендует на полноту. Наша задача — дать общее представление о конструкции и методах, попутно научив читателя некоторым общим математическим приемам.

2. Сложение по Минковскому

Все геометрические объекты, которые мы рассматриваем, живут в трехмерном или двумерном вещественном пространстве — выше мы подниматься не будем.

В пространствах большей размерности дело обстоит точно так же и не возникает никаких дополнительных эффектов.

Считая фиксированным начало координат O, для удобства мы отождествляем точку пространства с ее радиус-вектором.

Выпуклым многогранником (в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$) называется выпуклая оболочка непустого конечного множества точек.

Таким образом, точка или отрезок тоже считаются многогранниками, а открытый квадрат (квадрат без границы) — нет.

Наша цель — организовать многогранники в алгебраическую структуру, т. е. научиться производить с ними алгебраические действия, подчиненные обычным аксиомам.

Первое алгебраическое действие — суммирование по Минковскому.

Здесь имеется исторически сложившаяся путаница: скоро мы увидим, что это вовсе не сложение, а умножение. Поэтому мы используем для этой операции знак $\otimes$, которым обычно обозначают тензорное произведение и (иногда) свертку.

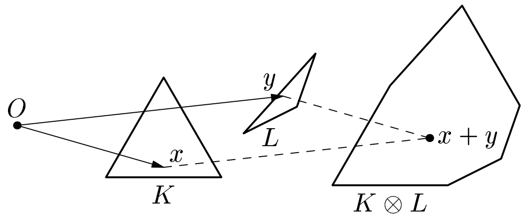


Рис. 1.

Определение 1. *Суммой Минковского* (или векторной суммой) двух выпуклых многогранников K и L называется множество точек

$$K \otimes L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}.$$

Задача 1. Найти сумму Минковского двух параллельных отрезков.

Задача 2. Найти сумму Минковского двух непараллельных отрезков.

Задача 3. Что произойдет с суммой Минковского, если подвинуть одно из слагаемых параллельным переносом?

Задача 4. Найти сумму Минковского треугольника и отрезка, лежащих в одной плоскости.

Задача 5. Найти сумму Минковского треугольника и отрезка, не лежащих в одной плоскости.

Задача 6. Что произойдет с суммой Минковского, если изменить начало координат?

Задача 7. Выпуклой оболочкой каких точек является сумма Минковского двух многогранников?

Задача 8. Убедитесь, что $K \otimes K$ есть многогранник K, гомотетично растянутый в 2 раза.

Следующее предложение почти очевидно.

Предложение 1.

- ▷ *Операция $\otimes$ коммутативна.*
- ▷ *Сумма Минковского содержит каждое из слагаемых после подходящего параллельного переноса.*
- ▷ *Сумма Минковского двух выпуклых многогранников — выпуклый многогранник.*
- ▷ *Для $\mathbf{1} = \{O\}$ и любого выпуклого многогранника K, справедливо: $K \otimes \mathbf{1} = K$.*

Последнее утверждение означает что у нас имеется нейтральный элемент **1** — многогранник, состоящий из одной точки O.

Внимательный читатель уже заметил, что мы приближаемся к понятию «абелева группа», но — увы! — второе утверждение предложения не дает никакой надежды на существование обратного, так как при сложении по Минковскому слагаемые не уменьшаются. Поэтому в классе выпуклых многогранников обратимы только одноточечные многогранники.

Разумеется, полугруппа выпуклых многогранников стандартным образом вкладывается в свою группу Гротендика, т. е. группу формальных выражений вида $K \otimes L^{-1}$. Наша задача — придать геометрический смысл этим выражениям. Это будет сделано на языке виртуальных многогранников (п. 6) и на двойственном языке опорных функций (п. 3.)

3. Опорная функция и веер выпуклого многогранника

Определение 2. Опорной функцией выпуклого многогранника K называется функция $h_K(x)$, заданная на $\mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{R}^3$, в зависимости от того, где живет K) формулой

$$h_K(x) = \max_{y \in K}(x, y).$$

(скобка обозначает скалярное произведение радиус-векторов).

Для вектора x максимум этого скалярного произведения достигается в точках пересечения многогранника K и прямой, касающейся K и ортогональной x (см. рис. 2).

Задача 9. Вообще-то, существуют две прямые с таким свойством. Какую именно мы берем?

Вот очевидные свойства опорной функции.

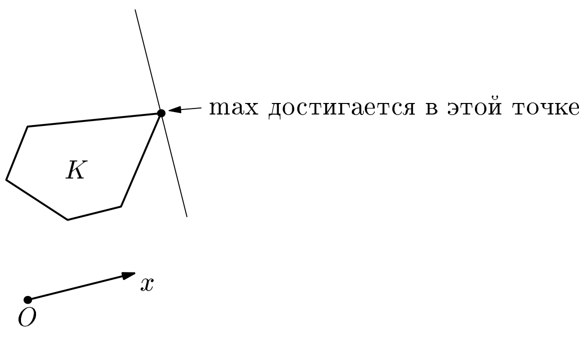


Рис. 2.

Предложение 2.

1. *В начале координат опорная функция равна нулю*: $h_K(O) = 0$.
2. *Для* $\lambda > 0$ *имеем* $h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x)$.
3. *Опорная функция одноточечного многогранника — линейная функция. В частности, это означает, что график опорной функции выпуклого многогранника из* $\mathbb{R}^2$ *есть плоскость в трехмерном пространстве.*
4. *Любая линейная функция, принимающая значение* 0 *в начале координат, является опорной функцией некоторого одноточечного многогранника.*

Задача 10. Докажите, что опорная функция суммы Минковского равна сумме опорных функций слагаемых:

$$h_{K\otimes L} = h_K + h_L.$$

Рассмотрим плоский многоугольник K. При фиксированном x скалярное произведение (см. определение опорной функции) достигает своего максимума в некоторой вершине A многоугольника K. Если мы будем потихоньку поворачивать радиус-вектор x, то некоторое время максимум будет достигаться в той же вершине A, затем в некоторый момент — на целом ребре, примыкающем к вершине A, а затем перепрыгнет на соседнюю вершину. Это значит, что опорная функция многогранника «склеена» из кусочков опорных функций вершин, т. е. из кусков линейных функций.

Пространство $\mathbb{R}^2$ оказывается разбито на плоские конуса (это то же самое, что плоские углы) с общей вершиной в начале координат так, что на каждом из конусов опорная функция линейна.

Тем самым, график опорной функции склеен из плоских кусочков, причем места склейки — лучи, ортогональные ребрам K (рис. 3).

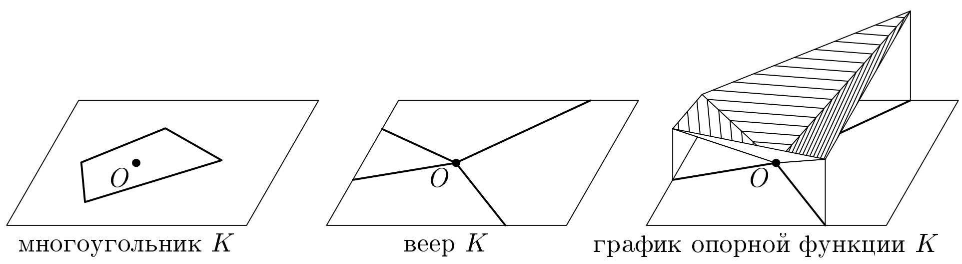


Рис. 3.

Что же происходит в трехмерном пространстве, какова опорная функция трехмерного многогранника K? Принципиально здесь всё то же самое, только картинка получается богаче: $\mathbb{R}^3$ оказывается разбито на многогранные конуса с общей вершиной в начале координат так, что на каждом из конусов опорная функция линейна.

Определение 3. Это разбиение называется *веером* многогранника K.

Удобно рисовать не сам веер, а его пересечение с единичной сферой с центром в точке O (*сферический веер* многогранника K). Мы получим разбиение сферы на сферические многогранники (*клетки веера*).

Имея многогранник, легко построить его сферический веер:

1. Отметьте на сфере концы внешних нормалей граней многогранника K.

2. Соедините на сфере каждые две полученные точки кратчайшим отрезком (куском большого круга), если соответствующие грани делят ребро.

(Докажите, что в результате этой процедуры действительно получается сферический веер.)

Обратите внимание на *комбинаторную двойственность* многогранника и его веера:

▷ вершинам веера соответствуют грани многогранника,

▷ ребрам веера соответствуют ребра многогранника,

▷ клеткам веера соответствуют вершины многогранника.

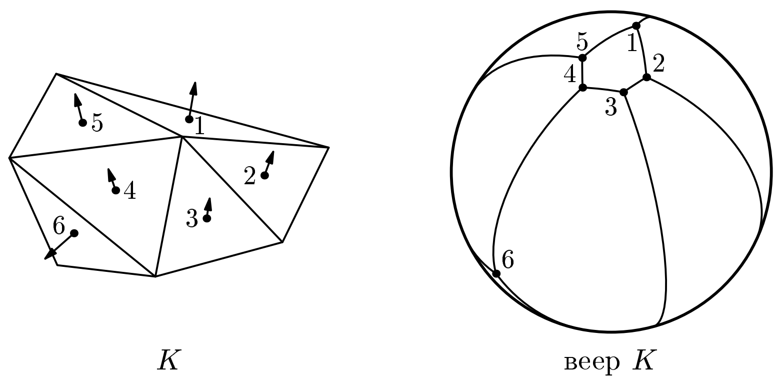


Рис. 4.

Задача 11. Постройте сферический веер куба, тетраэдра, треугольника (лежащего в трехмерном пространстве), отрезка (лежащего в трехмерном пространстве).

Теорема 1.

1. *Опорная функция выпуклого многогранника выпукла. Это значит, что для* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$
$$h_K(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \leqslant \lambda h_K(x_1) + (1-\lambda)h_K(x_2),$$
или (для тех, кто любит картинки больше формул) что график функции h_K *— выпуклая вниз поверхность.*

2. *Каждая непрерывная выпуклая функция* h, *принимающая значение* 0 *в начале координат, которая кусочно линейна относительно некоторого веера (т. е. разбиения пространства на конуса), является опорной функцией некоторого выпуклого многогранника. (Множество таких функций обозначим через* $\mathcal{H}$.)

3. *Опорная функция одноточечного многогранника — линейная функция. В частности, это означает, что график опорной функции точки из* $\mathbb{R}^2$ *есть плоскость в трехмерном пространстве.*

Поясним пункт 2. Восстановить многогранник легко: те линейные функции, из которых склеена h, дают нам координаты вершин.

При сложении по Минковскому выпуклых многогранников веера дробятся: чтобы нарисовать сферический веер суммы, нужно на одной и той же сфере нарисовать веера обоих слагаемых.

Мы поняли, что грубо говоря, выпуклый многогранник — это то же самое, что и его опорная функция: эти два объекта однозначно определяют друг друга, причем сложить два многогранника по Минковскому — то же самое, что сложить их опорные функции.

Официально это звучит так: полугруппа выпуклых многогранников канонически изоморфна полугруппе выпуклых кусочно-линейных функций $\mathcal{H}$. Это влечет изоморфизм соответствующих групп Гротендика.

Обращать (и вычитать) по Минковскому выпуклые многогранники мы пока не умеем. Но зато можно запросто брать со знаком «минус» (и вычитать друг из друга) опорные функции. Что при этом мы получим? Разность двух функций из $\mathcal{H}$ останется, разумеется непрерывной и кусочно-линейной относительно некоторого веера. А вот свойство выпуклости пропадет. Забавная ситуация: мы пока не знаем, что за объект «обратный по Минковскому к кубу», но уже поняли, чему равна его опорная функция. Хотелось бы придать этому объекту геометрический смысл. Мы это сделаем, но в несколько ходов.

4. Интегрирование по эйлеровой характеристике

Эйлерова характеристика — бесспорный лидер среди математических понятий по соотношению «простота – полезность». Об этом знает каждый, кому приходилось причесывать ежика, раскрашивать карты или учиться отличать тор от кренделя. Оказывается, по эйлеровой характеристике можно интегрировать, обращаясь с ней как с мерой.

Определение 4. Множество точек будем называть *многогранным*, если его можно получить конечным числом операций объединения, пересечения и дополнения из некоторого (конечного) набора выпуклых многогранников.

Определение 5. *Клеточным разбиением* многогранного множества M называется разбиение M на непересекающиеся многогранные подмножества (*клетки разбиения*) такие, что каждая клетка есть одно из следующих множеств:

0: точка (0-мерная клетка);

1: открытый отрезок (отрезок с выброшенными концами) (1-мерная клетка);

2: открытый двумерный многоугольник (многоугольник с удаленной границей) (2-мерная клетка);

3: открытый трехмерный многогранник (3-мерная клетка).

Определение 6. *Эйлеровой характеристикой* клеточного разбиения множества M называется

$$\chi(M) = (\text{число 0-мерных клеток}) - (\text{число 1-мерных клеток}) + \\ + (\text{число 2-мерных клеток}) - (\text{число 3-мерных клеток}).$$

Хотя одно и то же множество можно по-разному разбить на клетки, значение $\chi(M)$ от этого не меняется. (Это далеко не тривиальный факт, который мы оставляем без доказательства.)

Очевидное, но очень важное свойство эйлеровой характеристики — аддитивность:

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

Интегрировать нам предстоит только очень просто устроенные функции.

Определение 7. Пусть $f\colon M \to \mathbb{Z}$ — функция, заданная на некотором многогранном множестве M, такая, что f принимает конечное множество целочисленных значений, причем прообраз каждого числа —

многогранное множество. Такие функции мы будем называть *многогранными*, а множество всех многогранных функций, заданных на всем пространстве, будем обозначать через $\mathcal{M}$.

Положим по определению

$$\int_M f(x)\, d\chi(x) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} a \cdot \chi(f^{-1}(a)).$$

Это и есть *интеграл функции по эйлеровой характеристике*.

И всё: нет никаких верхних и нижних интегральных сумм, никаких переходов к пределу, никаких борелевых множеств (всех атрибутов интеграла Лебега).

Зато есть привычные свойства интеграла (докажите!):

Теорема 2.

1. *Интеграл суммы функций есть сумма интегралов слагаемых*

$$\int_M (f(x) + g(x))\, d\chi(x) = \int_M f(x)\, d\chi(x) + \int_M g(x)\, d\chi(x).$$

2. *Интеграл по объединению непересекающихся множеств есть сумма интегралов по каждому из них*

$$\int_{M\cup L} f(x)\, d\chi(x) = \int_M f(x)\, d\chi(x) + \int_L f(x)\, d\chi(x).$$

3. (*Теорема Фубини.*) *Можно интегрировать сначала по каждому слою, а затем — полученную функцию проинтегрировать по слоям*:

$$\int f(x,y)\, d\chi(x,y) = \int \Big(\int f(x,y)\, d\chi(x)\Big) d\chi(y).$$

5. От многогранников к функциям. Сложение по Минковскому как свертка по эйлеровой характеристике

Определение 8. *Сверткой* по эйлеровой характеристике двух многогранных функций f и g называется функция $f \otimes g$, заданная формулой

$$f \otimes g(x) = \int f(x-y) g(y)\, d\chi(y).$$

С каждым выпуклым многогранником K естественно связана многогранная функция I_K — его характеристическая функция:

$$I_K = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложение 3. *Пусть K и L — выпуклые многогранники. Тогда свертка I_K и I_L есть характеристическая функция суммы Минковского K и L:*

$$I_K \otimes I_L = I_{K \otimes L}.$$

Иными словами, сложить два многогранника — то же самое, что свернуть их характеристические функции по эйлеровой характеристике.

Поэтому мы можем позволить себе вольность обозначать выпуклый многогранник K и его характеристическую функцию I_K одним и тем же символом K.

Доказательство. Нам нужно доказать, что

$$\int I_K(x-y) I_L(y)\, d\chi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K \otimes L; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Под знаком интеграла стоит характеристическая функция пересечения двух выпуклых многогранников. Следовательно, интеграл при фиксированном x равен нулю, если эти многогранники не пересекаются (и сама функция — тождественный ноль), и равен единице, если подынтегральная функция — не тождественный ноль. Осталось заметить, что равенство $I_K(x-y)I_L(y) = 1$ справедливо при некотором y тогда и только тогда, когда x представим в виде суммы точек $x - y$ и y из многогранников K и L. □

6. Обращение по Минковскому. Группа виртуальных многогранников. Выворачивание наизнанку

С этого момента выпуклый многогранник — не только множество точек, но и многогранная функция.

Это обстоятельство и позволяет обращать выпуклые многогранники (относительно $\otimes$), но не в классе выпуклых многогранников (что, как мы убедились, невозможно), а в классе многогранных функций. А именно, верна теорема об обращении по Минковскому:

Теорема 3. *Для любого выпуклого многогранника K существует многогранная функция K^{-1} такая, что*

$$K \otimes K^{-1} = \mathbf{1}.$$

Эта функция устроена просто (см. рис. 5), она принимает только два значения:

$$K^{-1} = \begin{cases} (-1)^{\dim K}, & \textit{если } x \in \operatorname{Int}(S(K)); \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

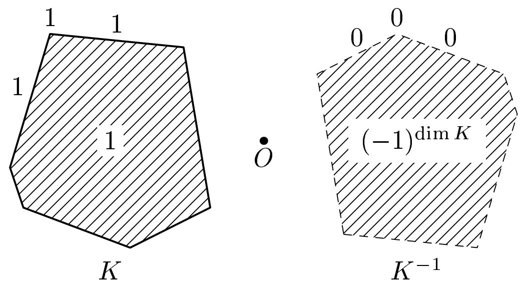


Рис. 5.

Поясним обозначения: $\dim K$ — размерность многогранника, S — центральная симметрия относительно начала координат, $\operatorname{Int} K$ — многогранник K без границы (от слова “interior” — внутренность).

Задача 12. Убедитесь, что теорема верна
– для отрезков на прямой (одномерных многогранников),
– для многоугольников на плоскости.
(После этого для трехмерных многогранников она станет очевидна.)

Задача 13. Прежде, чем читать дальше, подумайте, как определить разность по Минковскому двух выпуклых многогранников.

Определение здесь естественное:

Определение 9. Разность Минковского двух выпуклых многогранников $K \otimes L^{-1}$ есть свертка функций K и L^{-1}.

В отличие от обратного к выпуклому многограннику (который, грубо говоря, не сильно отличается от выпуклого многогранника), разности Минковского гораздо более разнообразны. Например, разность двух квадратов (один из них — повернутая копия другого) — правильная звезда с 8 лучами (см. рис. 6). На рисунке указаны значения этой функции, но не все — из-за нехватки места.

Забавно проследить выворачивание наизнанку (см. рис. 7): возьмем трапецию и вычтем из нее отрезок, параллельный основанию. Будем постепенно увеличивать длину вычитаемого отрезка. Пока отрезок маленький, у нас будет получаться (выпуклая) трапеция. Когда отрезок достигнет длины меньшего основания, разность выродится в треугольник. Затем появится растущий отрицательный кусок, а положительная часть будет уменьшаться, пока не исчезнет совсем.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всех многогранных функций, представимых в виде $K \otimes L^{-1}$. Операция свертки по Минковскому превращает $\mathcal{P}$ в абелеву группу. Действительно, мы уже знаем, что такое нейтральный

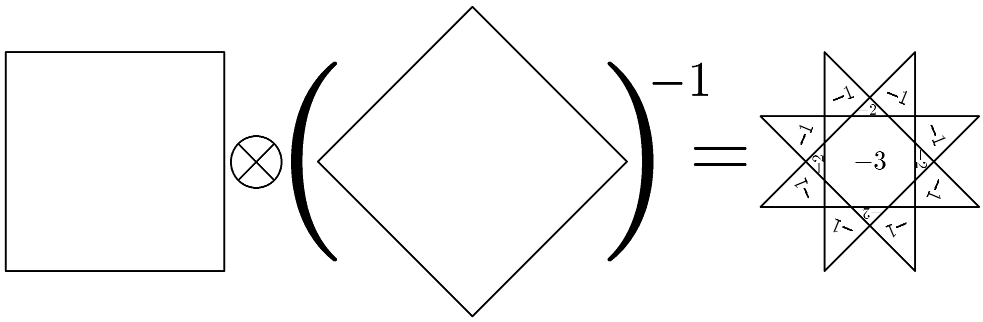


Рис. 6.

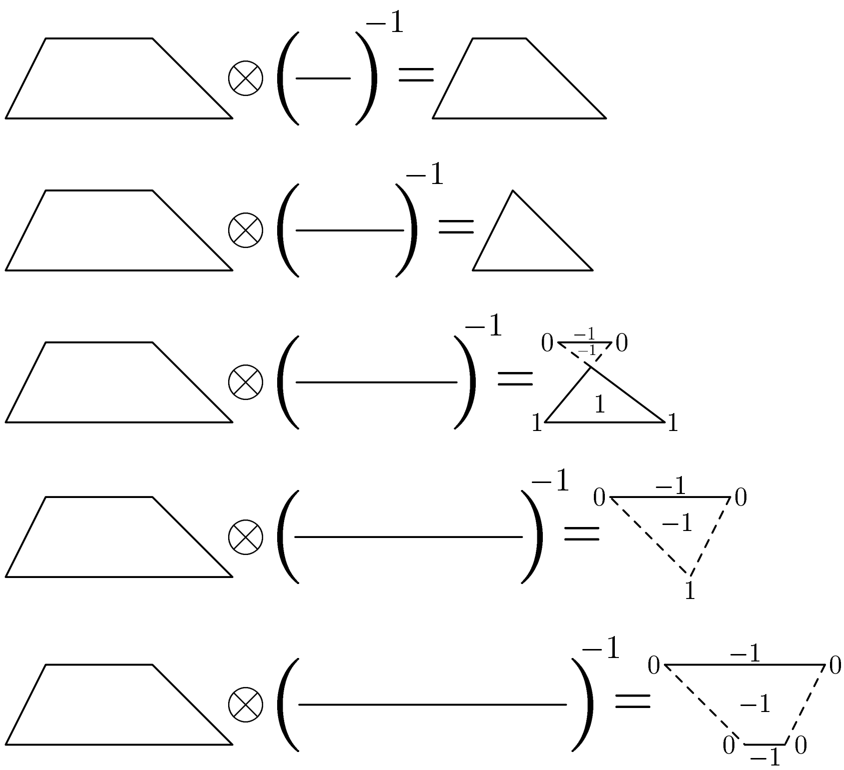


Рис. 7.

элемент, умеем обращать выпуклые многогранники (а значит, и выражения вида $K \otimes L^{-1}$).

Определение 10. $\mathcal{P}$ называется *группой виртуальных многогранников*.

7. Веера виртуальных многогранников

Что такое опорная функция виртуального многогранника, мы поняли раньше, чем поняли, что такое сам виртуальный многогранник.

Группа $\mathcal{P}$ изоморфна группе непрерывных функций, кусочно-линейных относительно некоторого веера.

Как может выглядеть сферический веер виртуального многогранника $K \otimes L^{-1}$? Нанесем на сферу линии излома функций h_K и h_L. Когда мы рассмотрим линии излома функции $h_K - h_L$, некоторые отрезки могут исчезнуть, здесь не будет простого измельчения, как при сложении выпуклых многогранников, и клетки полученного веера вполне могут оказаться невыпуклыми.

Вот красивый и важный пример.

Пример 1. Гиперболический тетраэдр. Сферический «Инь и Янь». Возьмем правильный тетраэдр Δ, отметим два противоположных ребра и вычтем из Δ отмеченные рёбра. Веер полученного виртуального многогранника (проверьте!) состоит из четырех равных невыпуклых частей (см. рис. 8).

С выпуклым многогранником естественно связана выпуклая многогранная поверхность — объединение его граней.

С некоторыми невыпуклыми многогранными поверхностями (которым не запрещается иметь самопересечения) можно связать виртуальный многогранник.

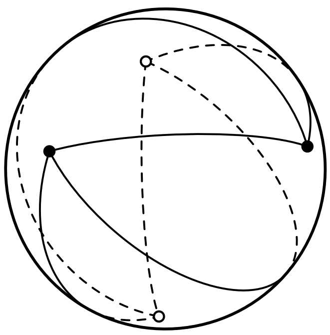


Рис. 8.

Это делается поэтапно согласно следующему алгоритму. Может получиться так, что очередной шаг невыполним. Это означает, что с данной поверхностью невозможно связать виртуальный многогранник.

Может получиться так, что выполнить некоторый шаг можно по-разному. Значит, виртуальных многогранников, связанных с этой поверхностью, несколько. (Например, с тетраэдром можно связать 52 различных виртуальных многогранника.)

Шаг 1. Для каждой грани поверхности зафиксируем ортогональный ей вектор.

Шаг 2. Нанесем концы всех этих векторов на единичную сферу. Полученные точки должны оказаться различными.

Шаг 3. Построим веер будущего виртуального многогранника. Соединим полученные точки геодезическими отрезками (не обязательно кратчайшими!) по следующему правилу: полученная картинка должна быть комбинаторно двойственна поверхности. В частности, мы соединяем две точки тогда, когда соответствующие грани делят ребро.

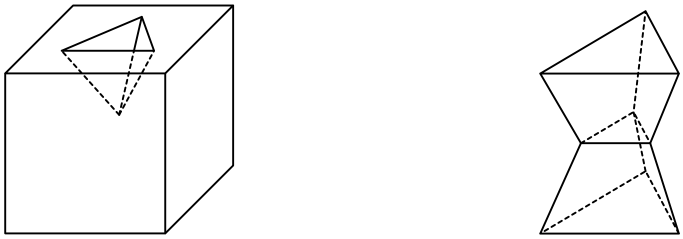
Шаг 4. Построим теперь кусочно-линейную функцию h. Она будет склеена из кусков опорных функций вершин поверхности. Возьмем клетку полученного веера, натянем на нее конус и положим функцию h на клетке равной опорной функции той вершины нашей поверхности, которая соответствует этой клетке. (То же самое происходит и в выпуклом случае). Проделав так со всеми клетками, получим кусочно-линейную функцию.

Шаг 5. Представим h в виде разности двух выпуклых функций $h = h_1 - h_2$. (Почему это возможно — отдельная задача. Решите ее.) Функции h_1 и h_2 соответствуют выпуклым многогранникам K_1 и K_2. Искомый виртуальный многогранник равен $K_1 \otimes K_2^{-1}$.

Задача 14. Каким поверхностям (рис. 9) соответствуют виртуальные многогранники?

8. От группы к алгебре. Инварианты Хадвигера на плоскости

На множестве всех многогранных функций зададим структуру алгебры над полем рациональных чисел. Для этого надо описать три операции, удовлетворяющие стандартным аксиомам, — сложение двух функций, умножение двух функций и умножение функции на рациональное число.



куб с тетраэдральной ямкой склейка двух усеченных тетраэдров

Рис. 9.

1. Сложение в алгебре — это просто обычное сложение функций:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. Роль умножения играет свертка по эйлеровой характеристике $f \otimes g$.
3. Умножать функцию на целое число нужно обычным способом:

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x).$$

А вот как надо умножать на рациональное число, объясним чуть позже — это и есть самое интересное и нетривиальное.

В нашей алгебре есть нейтральный элемент **1** — характеристическая функция начала координат.

Задача 15. Проверьте, что введенные операции удовлетворяют аксиомам алгебры:

1. $f \otimes (g+h) = f \otimes g + f \otimes h$.
2. $f \otimes g = g \otimes f$.

Подсказка: достаточно убедиться в справедливости аксиом для случая, когда f и g — характеристические функции выпуклых многогранников.

Наконец, важный завершающий шаг построения алгебры — факторизация по параллельным переносам. Условимся считать в нашей алгебре два многогранника (= их характеристические функции) равными, если они отличаются на параллельный перенос.

Мы факторизуем кольцо многогранных функций по всем соотношениям вида $K - tK = 0$, где K — выпуклый многогранник, а t — параллельный перенос.

Заметим, что при этом автоматически равными между собой становятся многие многогранные функции. Каждую многогранную функцию можно разрезать на куски, затем параллельно перенести каждый кусок (для разных кусков можно использовать разные параллельные переносы!), и полученная многогранная функция окажется равной исходной.

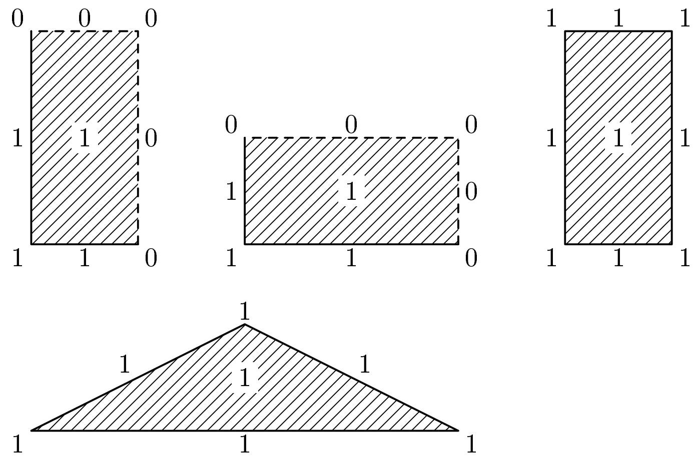


Рис. 10.

Задача 16. Какие из многогранных функций, изображенных на рис. 10, равны между собой в алгебре многогранников?

Здесь уместно сделать отступление. Идея разрезания многогранников на куски и складывания из кусков чего-то нового знакома тем, кто знает о знаменитой третьей проблеме Гильберта.

Третья проблема Гильберта отличается от того, что происходит в алгебре многогранников:

во-первых, куски разрешается передвигать, пользуясь любыми движениями плоскости, а не только параллельными переносами,

во-вторых, в алгебре многогранников учитываются куски всех размерностей (точки и отрезки не равны нулю), тогда как в третьей проблеме Гильберта ими пренебрегают.

После факторизации по параллельным переносам в алгебре многогранников стало трудно различать функции: после разрезания на куски и перемешивания картинка может измениться неузнаваемо.

Для распознавания равных многогранных функций на плоскости введем следующие инварианты.

Два из них простые.

Положим

$$h_0(f) = \int f(x)\, d\chi(x)$$

и

$$h_2(f) = \int f(x)\, dx.$$

Эти величины называются *нулевым и вторым инвариантом Хадвигера* многогранной функции f.

Во втором интеграле интегрирование обычное, по мере Лебега. Величину $h_2(f)$ естественно называть площадью функции f.

Введем более сложный инвариант, вернее целое семейство таковых. При фиксированном единичном векторе ξ определим *длину ребра с нормалью* ξ многогранной функции в два приема:

1. Пусть K — выпуклый многогранник. Положим по определению $h_1(K,\xi)$ равным длине ребра K, внешняя нормаль которого равна ξ.

2. Произвольную многогранную функцию f разложим на выпуклые многогранники $f = \sum_i a_i K_i$ и положим $h_1(f,\xi) = \sum_i a_i h_1(K_i,\xi)$.

Функция h_1 называется *первым инвариантом Хадвигера*.

Задача 17*. Докажите, что это определение корректно: значение h_1 не зависит от представления функции f в виде линейной комбинации многогранников.

Теорема 4. *Система инвариантов Хадвигера полна, т. е. две многогранные функции f и g, заданные на $\mathbb{R}^2$, равны (после факторизации) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &h_0(f) = h_0(g), \\ &h_2(f) = h_2(g), \\ &h_1(f,\xi) = h_1(g,\xi), \quad \textit{для любого } \xi. \end{aligned}$$

Задача 18*. Докажите эту теорему.

В пространствах большей размерности ситуация аналогичная: там тоже определена система инвариантов Хадвигера, являющаяся полной. При этом инвариант h_k также «отвечает» за грани размерности h_k многогранной функции, но роль параметра ξ играет не единичный вектор, а флаг.

Задача 19. Вычислите инварианты Хадвигера многогранных функций, изображенных на рисунке 10.

9. Пытаемся умножать на дроби

Чтобы множество многогранных функций превратить в алгебру над $\mathbb{Q}$, надо задать операцию умножения многогранных функций на рациональные числа.

При этом надо обеспечить выполнение аксиом дистрибутивности

$$q \cdot (f+g) = q \cdot f + q \cdot g$$

и ассоциативности

$$(qr) \cdot f = q \cdot (r \cdot f).$$

Как уже говорилось, умножить многогранную функцию на целое число легко — нужно просто использовать поточечное умножение:

$$(n \cdot f)(x) = nf(x).$$

С дробями дело обстоит сложнее. Пусть f — многогранная функция.

Попробуем определить многогранную функцию $1/n \cdot f$ для натурального числа n (этого достаточно для умения умножать на любые рациональные числа).

Мы должны найти такую многогранную функцию g, что в нашей алгебре выполнено равенство $n \cdot g = f$.

Просто умножить f на $1/n$ нельзя: у многогранных функций по определению все значения целые.

Более того, искомая функция g может вообще не существовать: заметим, что

$$\int f(x)\, d\chi(x) = n \int g(x)\, d\chi(x),$$

т. е. $\int f(x)\, d\chi(x)$ кратно n, что не всегда верно.

Значит, у нас есть шанс научиться умножать на произвольные дроби лишь те функции, у которых $\int f(x)\, d\chi(x) = 0$.

Начнем с примеров.

Задача 20. Найти $1/2 \cdot f$, где f — характеристическая функция
– полуоткрытого отрезка;
– квадрата с выкинутыми двумя смежными сторонами;
– треугольника с выкинутой вершиной;
– тетраэдра с выкинутой вершиной.

Задача 21. Найти $1/n \cdot f$, где f — характеристическая функция
– полуоткрытого отрезка;
– параллелограмма с выкинутыми двумя смежными сторонами;
– треугольника с выкинутой вершиной;
– тетраэдра с выкинутой вершиной.

Чтобы умножить на $1/n$ произвольную многогранную функцию f, для которой $\int f(x)\, d\chi(x) = 0$, надо проделать следующее.

▷ Представить f в виде линейной комбинации полуоткрытых отрезков, треугольников с выкинутой вершиной, и тетраэдров с выкинутой вершиной.

▷ Умножить каждое из слагаемых на $1/n$.

▷ Воспользоваться дистрибутивностью.

Таким образом, на множестве многогранных функций мы почти ввели структуру алгебры над полем рациональных чисел. Слово «почти» относится к тому факту, что функции с ненулевым значением $\int f(x)\, d\chi(x)$ нельзя умножить на произвольную дробь.

10. Логарифм и экспонента

На первый взгляд, это совершенно дикая нереализуемая идея: мы с большим трудом справились с умножением на рациональные числа, а здесь участвует трансцендентное число e, и вообще неясно, как возвести число в степень «треугольник».

На самом деле введение логарифма и экспоненты — хороший пример того, что часто общее бывает проще частного. Этот прием будет работать не только в алгебре многогранников, но и в любой другой градуированной алгебре с обрывающейся градуировкой.

Пусть f — многогранная функция такая, что $\int f(x)\,d\chi(x) = 0$. Определим логарифм $f+1$, минуя число e. Из курса анализа известно, что при фиксированном x степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

сходится к $\ln(x+1)$. (Читателю можно не вспоминать подробности вопросов сходимости рядов, нам важен лишь его вид).

Экспонента тоже представима в виде ряда:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Что если попытаться подставить в эти ряды функцию f? Мы уже умеем перемножать многогранные функции и складывать их, но как быть с переходом к пределу?

А здесь нас ждет подарок судьбы (доказательство мы опустим, подарок так подарок):

Предложение 4. *Для выпуклого многогранника K*

$$(K-1)^4 = 0.$$

Значит, вместо бесконечного ряда у нас останется простая конечная сумма.

Определение 11. Пусть f — многогранная функция такая, что

$$\int f(x)\,d\chi(x) = 0.$$

Положим по определению

$$\ln(f+1) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{f^n}{n}, \qquad \exp f \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}\,.$$

Введенные нами логарифм и экспонента обладают знакомыми со школы свойствами:

Теорема 5. *Пусть многогранные функции f и g таковы, что*

$$\int f(x)\, d\chi(x) = \int g(x)\, d\chi(x) = 0.$$

Тогда

1. $\ln((f+1)\otimes(g+1)) = \ln(f+1) + \ln(g+1)$.
2. $\exp(f+g) = \exp f \otimes \exp g$.
3. $\ln(\exp f) = f$.
4. $\exp(0) = \mathbf{1}$.

Задача 22. Докажите эту теорему. Это надо делать в лоб, как в пятом классе на уроках алгебры: прямо подставить степенные ряды, раскрыть скобки, привести подобные члены и не забыть при этом, что большие степени обнуляются.

11. Градуировка в алгебре многогранников

Мы покажем, что построенная нами алгебра похожа на алгебру многочленов. Подобно тому, как многочлен естественным образом представим в виде суммы одночленов разных степеней, многогранные функции представимы в виде суммы так называемых однородных элементов. При этом однородные многогранные функции, так же как и однородные многочлены, «ловятся» гомотетиями.

Начнем с элементарного замечания. Пусть $f(x)$ — многочлен. Рассмотрим новый многочлен $(2)f(x)$, полученный гомотетичным сжатием оси x:

$$(2)f(x) = f(2x)$$

При этом свободный член нового многочлена остается прежним, коэффициент при x увеличивается в 2 раза, коэффициент при x^2 увеличивается в 4 раза, и так далее.

Поэтому одночлены среди многочленов легко распознать с помощью растягивания гомотетией оси x: например, одночлен третьей степени — это такой многочлен, который при действии (2) увеличивается в 8 раз.

Иными словами, справедлива очевидная теорема:

Теорема 6. *В алгебре многочленов $\mathcal{F}$ от одной переменной можно выделить (непересекающиеся) подмножества $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, … такие, что*

1. *Каждый многочлен f единственным образом представим в виде $f = \sum_i f_i$, $f_i \in \mathcal{F}_i$.*
2. *Если $f_i \in \mathcal{F}_i$, $f_j \in \mathcal{F}_j$, то $f_i \cdot f_j \in \mathcal{F}_{i+j}$.*
3. *Действие (2) увеличивает элементы $\mathcal{F}_i$ в 2^i раз.*

(В таких случаях говорят, что на множестве многочленов есть структура градуированной алгебры.)

Множество $\mathcal{F}_i$ называются однородными компонентами степени i алгебры многочленов.

На множестве многогранных функций есть аналогичное действие гомотетии: положим $(2)f(x) = f(x/2)$. Замечательный и нетривиальный факт состоит в том, что для алгебры многогранников также имеет место аналог теоремы об однородных компонентах.

Теорема 7. *В алгебре многогранников $\mathcal{M}$ можно выделить (непересекающиеся) подмножества $\mathcal{M}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ такие, что*

1. *Каждая многогранная функция f единственным образом представима в виде $f = \sum_i f_i$; $f_i \in \mathcal{M}_i$.*
2. *Если $f_i \in \mathcal{M}_i$, $f_j \in \mathcal{M}_j$, то $f_i \cdot f_j \in \mathcal{M}_{i+j}$.*
3. *Действие (2) увеличивает многогранную функцию $f_i \in \mathcal{M}_i$ в 2^i раза: $f \in \mathcal{M}_i$ равносильно тому, что $(2)f = 2^i f$.*

Множество $\mathcal{M}_i$ называется однородной компонентой алгебры многогранников степени i.

Элементы $\mathcal{M}_i$ являются аналогами одночленов степени i.

Доказательство. Попробуем понять, что из себя представляют однородные элементы алгебры многогранников (аналоги одночленов в алгебре многочленов). Пусть K — выпуклый многогранник. Заметим, что

$$(2)\ln K = 2 \cdot \ln K.$$

Действительно,

$$2 \cdot \ln K = \ln(K \otimes K) = \ln((2)K) = (2)\ln K.$$

Задача 23. Докажите, что

$$(2)(\ln K \otimes \ln K) = 4 \cdot (\ln K \otimes \ln K)$$

и что

$$(2)((\ln K)^i) = 2^i \cdot ((\ln K)^i)$$

Наконец отметим, что $(2)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. (Действительно, точка при растягивании не меняется).

Поэтому естественно задать $\mathcal{M}_i$ как множество всех линейных комбинаций функций вида $(\ln K)^i$, где K — выпуклый многогранник.

Нам надо научиться раскладывать многогранную функцию f в сумму однородных членов. Для этого достаточно проделать это для выпуклого многогранника K.

Положим $p = \ln K$. Тогда

$$K = \exp(\ln K) = \sum_{i=0}^{4} \frac{p^i}{i!}.$$

Это и есть искомое разложение на однородные компоненты.

Приложение. Ответы и указания

Задача 1. Сумма Минковского есть отрезок суммарной длины.

Задача 2. Параллелограмм.

Задача 4. Пятиугольник.

Задачи 6 и 3. Сумма останется той же с точностью до параллельного переноса.

Задача 11. Веер тетраэдра изображен на рис. 11.

Веер отрезка — разбиение сферы большим кругом (ортогональным отрезку) на две полусферы.

Веер куба — разбиение сферы тремя большими кругами. В этом можно убедиться, пользуясь алгоритмом, но проще заметить, что куб есть сумма Минковского трех отрезков, веера которых мы уже знаем.

Задача 14. Виртуальный многогранник существует только для второй поверхности, см. рис. 12.

Задача 16. Первые две.

Задача 20.

– Полуоткрытый отрезок равен сумме двух полуоткрытых отрезков половинной длины.

– Такой полуоткрытый параллелограмм легко разбить на две равные части разрезом, параллельным одной из сторон.

– Представьте этот полуоткрытый треугольник как объединение двух (гомотетично в 2 раза меньших) полуоткрытых треугольников и параллелограмма.

– Аналогично предыдущему пункту, представьте тетраэдр в виде объединения двух (гомотетично в 2 раза меньших) тетраэдров и двух призм, с треугольным основанием и параллелограммом в основании. Призмы режутся пополам легко.

Задача 21. См. указания к предыдущей задаче.

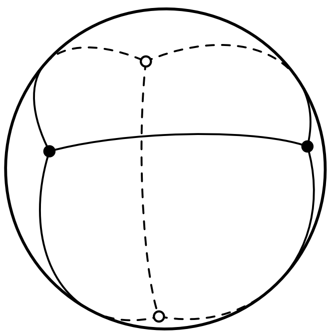


Рис. 11.

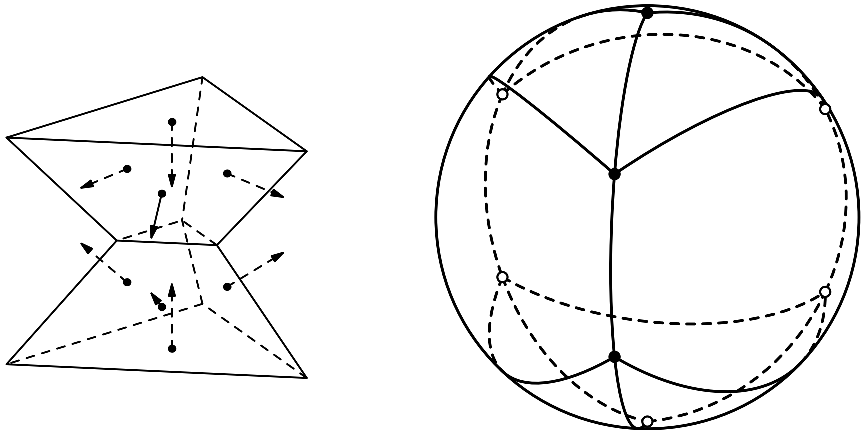


Рис. 12.

Список литературы

[1] Пухликов А., Хованский А. *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников* // Алгебра и Анализ, 1992. Т. 4, №2. С. 161–185.

[2] McMullen P. *The polytope algebra* // Adv. Math., 1989. V. 78, no 1. P. 76–130.

[3] Panina G. *New counterexamples to A.D. Alexandrov's hypothesis* // Adv. in Geometry, 2005. V. 5. P. 301–317.

Панина Гаянэ Юрьевна, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН. С. Петербург 199178, 14 линия В.О. 39
факс (812)3284450
д. тел. (812)5504571
e-mail: `panina@iias.spb.su`