ЛЕКЦИЯ 4. КОМБИНАТОРНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

записано Князевой М.

1. Шарнирные механизмы

Определение 1.1. *Графом* называется пара (V, E), где $V = \{1, ..., n\}$ - множество вершин графа; $E \subset \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$ - множество ребер, где пары (i, j) неупорядоченные.

Таким образом, мы рассматриваем простые графы (без петель и кратных ребер).

Определение 1.2. *Шарнирный механизм (framework)* - это набор (V, E, p), где (V, E) - граф, $p : V \to \mathbb{R}^d$ - инъективное отображение, $(d = 1, 2, 3)$, $p_i \neq p_j$. Обозначаем $p_i = p(i)$.

Мы не требуем вложенности: ребра графов могут пересекаться, не образовывая вершину.

Определение 1.3. *Изгибание шарнирного механизма* (V, E, p) - это непрерывное изменение p, такое, что $(i, j) \in E \Rightarrow \mid p_i p_j \mid = \text{const}$.

Изгибанием является и простое перемещение всей конструкции в целом.

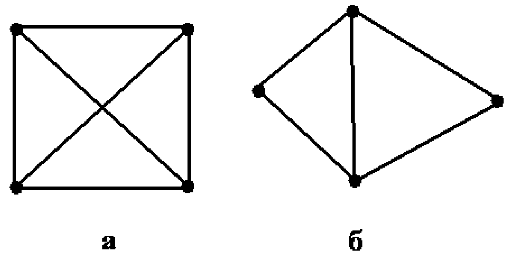
Определение 1.4. Изгибание *тривиально*, если оно порождено движением $\mathbb{R}^d$.

Разумеется, интересны нетривиальные изгибания шарнирных механизмов.

Определение 1.5. Шарнирный механизм (V, E, p) называется *жестким*, если все его изгибания тривиальны.

На рисунке 1.6 а - пример жесткого шарнирного механизма. Рисунок 1.6 б иллюстрирует тот факт, что жесткость зависит от размерности $\mathbb{R}^d$: изображенный шарнирный механизм является жестким в $\mathbb{R}^2$ и изгибаемым в $\mathbb{R}^3$.

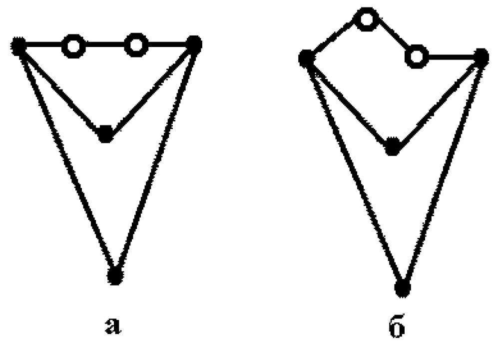
Рисунок 1.6.



Рассмотрим два примера, иллюстрирующих зависимость жесткости шарнирных механизмов от их комбинаторной составляющей (то есть от графа).

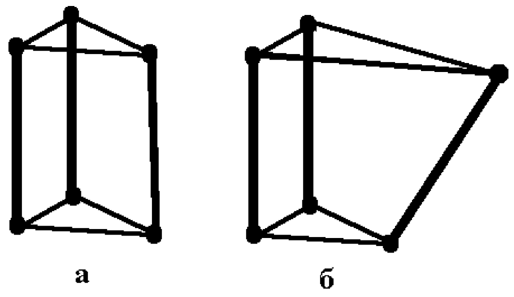
Пример 1.7. *На рисунке 1.8 а изображен жесткий граф, у него выделенные вершины коллинеарны. Если эти вершины поместить в общее положение, то граф становится изгибаемым (см. рисунок 1.8 б).*

Рисунок 1.8.



Пример 1.9. *На рисунке 1.10 а изображен изгибаемый шарнирный механизм. Реализация того же графа с вершинами в общем положении - жесткий механизм (см. рисунок 1.10 б).*

Рисунок 1.10.

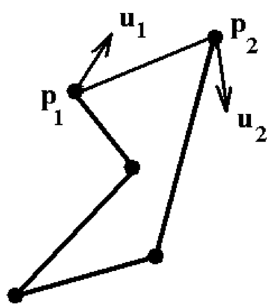


Дадим несколько определений, необходимых далее.

Определение 1.11. *Инфинитезимальным движением (ИД)* шарнирного механизма (V, E, p) называется отображение $u : V \to \mathbb{R}^d$ такое, что

$$(\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{u_j})(\overrightarrow{p_i} - \overrightarrow{p_j}) = 0.$$

Рисунок 1.12.



Определение 1.13. *Тривиальным* инфинитезимальным движением называется ИД, порожденное движением $\mathbb{R}^d$.

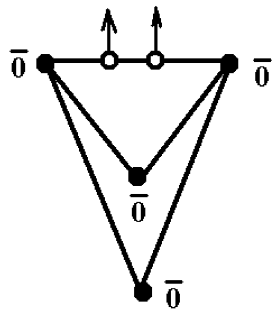
Определение 1.14. Шарнирный механизм *инфинитезимально жесткий*, если все его ИД тривиальны.

Если шарнирный механизм изгибаем, то он инфинитезимально изгибаем. (Смысл порожденного инфинитезимального изгибания - мгновенные скорости вершин при обычном изгибании).

Обратное неверно: на рисунке изображен жесткий шарнирный механизм, допускающий инфинитезимальное движение. Для этого всем вершинам, кроме выделенных, приписывается нулевой вектор скорости, а выделенным вершинам - одинаковые ненулевые вектора скорости.

Множество ИД образует линейное пространство.

Рисунок 1.15.



Теорема 1.16. *Пусть (V, E) - граф. Для шарнирных механизмов (V, E, p) в $\mathbb{R}^d$ (d фиксировано) возможны два случая:*

(1) *для почти всех p шарнирный механизм (V, E, p) изгибаем;*
(2) *для почти всех p шарнирный механизм (V, E, p) жесткий.*

Примечание. Мы отождествляем инъекцию p с точкой в пространстве $\mathbb{R}^{d \cdot n}$ (просто выписав в строчку координаты всех $p(i)$.

"Почти все p" означает, "все p, кроме множества меры (Лебега) ноль".

Идея доказательства.

Докажем эту теорему для инфинитезимальных движений.

Так как $p_i \neq p_j$, из пространства $\mathbb{R}^{d \cdot n}$ исключаются плоскости, задаваемые этими уравнениями $(p_i \neq p_j)$.

Ограничимся случаем $d = 2$. В этом случае существование нетривиальных ИД означает, что множество решений линейной системы $(\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{u_j})(\overrightarrow{p_i p_j}) = 0$ имеет размерность больше 3. Это условие выражается на языке равенства (неравенства) нулю некоторых миноров матрицы этой системы, то есть к некоторой системе полиномиальных уравнений $\{Pol_j(p_1, ..., p_n) = 0\}$. Ее решения - либо некоторое алгебраическое множество (его мера лебега - всегда ноль), либо все постранство без некоторого алгебраического множества. $\square$

2. Жесткость поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 2.1. *(Коши-Александров) Выпуклые многогранники жесткие.* $\square$

Теорема 2.2. *(Gluk) Замкнутая симплициальная (ее грани - треугольники) поверхность общего положения в $\mathbb{R}^3$ - жесткая.* $\square$

Теорема 2.3. *(Asimov, Roth) Пусть K - многогранник в $\mathbb{R}^3$, у которого хотя бы одна грань - не треугольник. Тогда скелет K (т.е. шарнирный механизм, порожденный вершинами и ребрами многогранника) допускает изгибание.* $\square$

Эта теорема дает возможность построить множество изгибаемых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ (достаточно построить поверхность, у которой не все грани - треугольники).

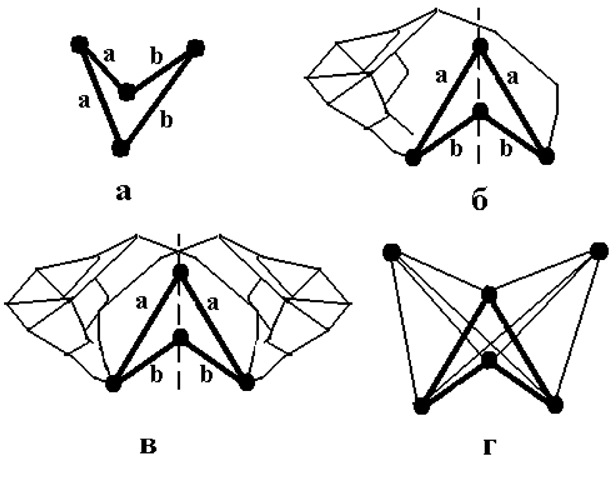
Построим особую изгибаемую поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Начинаем с шарнирного механизма, изгибаемого со степенью свободы 2 (см. рисунок 2.4 а). При любых изгибаниях этот шарнирный механизм остается симметричным относительно некоторой плоскости (см. рисунок 2.4 б - пунктирная линия). Приклеим к данному шарнирному механизму многогранную поверхность (топологический диск), несимметричный относительно плоскости симметриии шарнирного механизма (см. рисунок 2.4 б). Получим многогранник с дыркой. К этой дырке приклеиваем симметричный образ многогранной поверхности (относительно плоскости симметрии шарнирного механизма (см. рисунок 2.4 в). Изгибания первой части многогранной поверхности порождают (в силу симметрии) те же изгибания исходного механизма из четырех отрезков что и изгибания второй части многогранной поверхности.

Получаем изгибаемую поверхность, которая топологически является сферой.

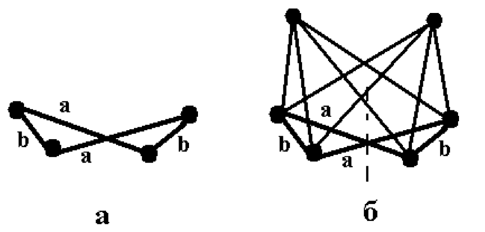
Самый простой пример - добавить одну точку, пролучаем изгибаемый октаэдр Брикара первого рода (см. рисунок 2.4 г).

Рисунок 2.4.



Другой пример: если начинать с другого шарнирного механизма с двумя степенями свободы (см. рисунок 2.5 а), то аналогичные построения приводят к новой изгибаемой поверхности. (Здесь мы имеем симметрию относительно прямой, соединяющей середины диагоналей.) Если в качестве приклеиваемого многогранника снова взять одну точку, то получим изгибаемый октаэдр Брикара второго рода (см. рисунок 2.5 б)

Рисунок 2.5.



R. Connelly построил замкнутую изгибаемую поверхность без самопересечений в $\mathbb{R}^3$.

3. Жесткость в $\mathbb{R}^2$.

По теореме 1.16, для p в общем положении жесткость (V, E, p) определяется графа (V, E). Поэтому имеет смысл говорить о жесткости (изгибаемости) графа (а не шарнирного механизма).

Определение 3.1. Граф (V, E) - *минимально жесткий*, если

(1) Шарнирный механизм (V, E, p) жесткий в общем положении;
(2) $\forall E' \subset E, E' \neq E$ (V, E, p) - изгибаем в общем положении (т.е. стирание любого ребра портит жесткость).

У любого жесткого графа есть минимально жесткий подграф. Поэтому достаточно описать только минимально жесткие графы.

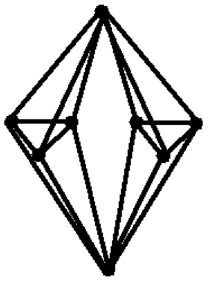
Теорема 3.2. *Пусть n - количество вершин графа, m - количество ребер. Граф (V, E) - минимально жесткий (ламанов граф), если*

(1) $m = 2n - 3$
(2) *любое k-элементное подмножество множества вершин графа порождает не более $2k - 3$ ребра.* □

Эта теорема будет доказана позже.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ аналог этой теоремы требует формулы $m = 3n - 6$. Аналог верен лишь в сторону $\Rightarrow$. Обратная теорема для $\mathbb{R}^3$ неверна: существует контрпример ("двойной банан", см. рисунок 3.3). Для этого графа выполнены условия теоремы Ламана (вариант $m = 3n - 6$), но он является изгибаемым.

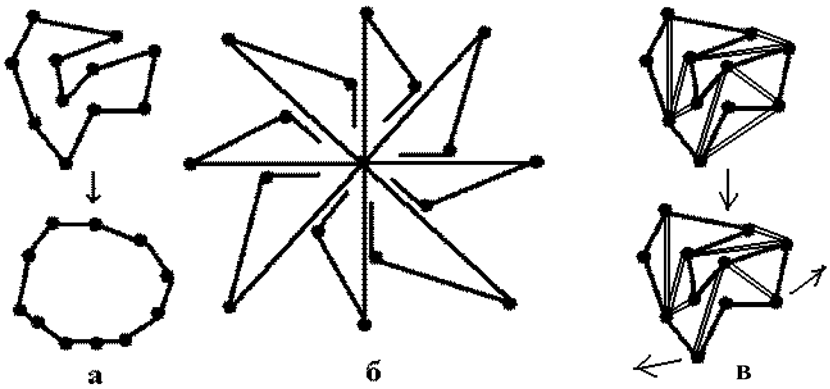
Рисунок 3.3.



Задача Connelly (1970): в $\mathbb{R}^2$ есть шарнирный механизм (т.н. *плотницкая линейка*, см. рисунок 3.4 а). Всегда ли возможно распрямить в плоскости эту плотницкую линейку, изгибая шарнирный механизм? При движениях пересечения ребер запрещаются.

На рисунке 3.4 б приведен пример дерева, которое нельзя распрямить в плоскости.

Рисунок 3.4.



Только спустя 30 лет задача о плотницкой линеке была решена положительно. В 2001 I. Streinu предложила алгоритм распрямления плотницкой линейки путем добавления к данному шарнирному механизму новых ребер двух типов: дополнительные ребра первого типа дополняют граф до выпуклой оболочки. Дополнительные ребра второго типа - всевозможные ребра, соединяющие вершины графа так, чтобы при каждой вершине существовал угол, больший π (Т.н. свойство "pointed"графа). Затем удаляется одно из ребер на выпуклой оболочке и вершины, прежде соединенные этим ребром, раздвигаются в стороны (см. рисунок 3.4 в). Свойство "pointed"графа при этом обеспечивает, что расстояние между любыми двумя вершинами графа не уменьшается (т.н. *expansive motion*). Как только при таком движении свойство "pointed"у какой-нибудь вершины пропадает, то производятся некоторые перестройки графа и процесс продолжается до полного распрямления плотницкой линейки.

Заметим, что добавление всех возможных ребер в граф с сохранением свойства "pointed"приводит к разбиению графа на особые элементы - невыпуклые многоугольники с ровно 3 выпуклыми углами (т.н. *псевдотреугольники*).

E-mail address: marinakn@mail.ru