МАТРОИДНОЕ ЗАМЫКАНИЕ. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ. ВНУТРЕННИЕ СТРЕССЫ.

записано Князевой М.

Пусть S - конечное множество, 2^S - множество всех его подмножеств.

Определение 1.1. Отображение

$$< \cdot >: S \to 2^S,$$

$$T \to < T >$$

называется *матроидным замыканием* (matroid closure operator), если:

(1) $\forall T \subseteq S \quad T \subseteq < T >$;
(2) $T_1 \subseteq T_2 \Rightarrow < T_1 > \subseteq < T_2 >$;
(3) $<< T >> = < T >$;
(4) Пусть $T = < T >$ (в этом случае T называется *замкнутым*)
$\forall s, t \in S \setminus T$ верно: $s \in < T \cup \{t\} > \Leftrightarrow t \in < T \cup \{s\} >$

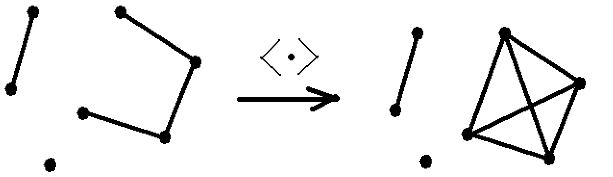
Примеры

1) Обычное топологическое замыкание - не всегда матроидное замыкание.

Упражнение: придумайте такой пример.

2) *Замыкание по связности.*

Рисунок 1.2.



Пусть S - множество ребер полного графа $K(V)$ и $E \subseteq S$.

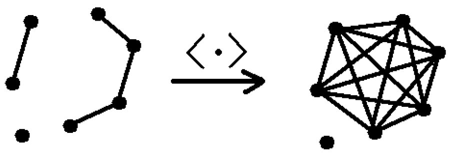
Тогда ребро $e \in < E > \Leftrightarrow$ (по определению) концы ребра e соединяет некоторый путь, состоящий из ребер из множества E.

Упражнение: покажите, что это матроидное замыкание.

3) *Пример нематроидного замыкания* (в обозначениях примера 2).

$e \in < E > \Leftrightarrow$ концы ребра e соединяют точки, являющиеся концами некоторых ребер из множества E.

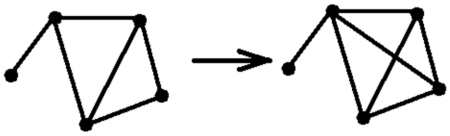
Рисунок 1.3.



4) *Замыкание по жесткости* (в обозначениях примера 2).

Пусть $E \subseteq S$.по определению, ребро $e = (ij) \in< E > \Leftrightarrow$ при любом изгибании шарнирного механизма (V, E, p) (где p - вложение общего положения) длина $\mid \overrightarrow{p_i} - \overrightarrow{p_j} \mid$ не меняется.

Рисунок 1.4.



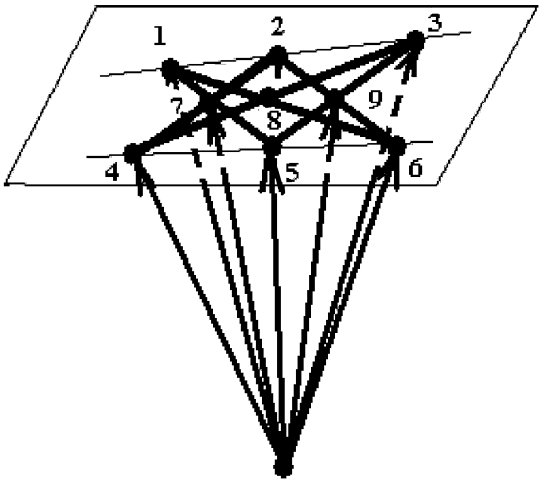
5) Пусть $S = \{s_1, ..., s_n\}$ - набор векторов, $s_i \in \mathbb{R}^d$ и пусть $E \subseteq S$. Положим $< E >= Lin(E) \cap S$, где $Lin(E)$ - линейная оболочка векторов из E.

Упражнение: покажите, что это матроидное замыкание.

Ниже мы покажем, что пример 5 достаточно универсален: примеры 2 и 4 могут быть описаны н аязыке примера 5. Однако он не достаточно универсален - существуют матроидные замыкания, не вписывающиеся в рамки примера 5 (нереализуемые матроиды).

Пример. Рассмотрим набор векторов, порожденных конфигурацией Паппа.

Рисунок 1.5.



На языке примера 5 замкнутость следующих множеств равносильна коллинеарности соответствующих троек:

$\{1,2,3\}$

$\{4,5,6\}$

$\{4,7,2\}$

$\{5,7,1\}$

$\{...\}$ - все замкнуты (мы описали все коллинеарности, участвующие в условии теоремы Паппа), поэтому $\{7,8,9\}$ - замкнуто. Однако последний вывод не следует из аксиом матроидного замыкания.

Если считать, что $<\{7,8,9\}>=\{1,2,3,4,...,9\}$, то получится матроидное замыкание, не описываемое векторным примером 5.

Матрица жесткости.

Пусть (V,E,p) - шарнирный механизм в $\mathbb{R}^d$, $\#(V)=n$, $\#(E)=m$. Напомним, что инфинитезимальные движения есть решения системы

$$(\overrightarrow{p_i}-\overrightarrow{p_j})(\overrightarrow{u_i}-\overrightarrow{u_j})=0,$$

$u=(\overrightarrow{u_1}...\overrightarrow{u_n}), u_i\in\mathbb{R}^d$. Матрица этой системы называется *матрицей жесткости*:

она имеет m строк (строки соответствуют ребрам графа;предполагается, что ребра как-то упорядочены) и $d\cdot n$ столбцов, в i-том столбце стоит элемент p_i-p_j, в j-том столбце стоит элемент p_j-p_i, остальные элементы - нули ((i,j) - ребро из E).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_n & 0 & 0 & ... & 0 & \mathbf{p}_n-\mathbf{p}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}_3-\mathbf{p}_7 & 0 & ... & 0 \\ ... & 0 & \mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j & ... & \mathbf{p}_j-\mathbf{p}_i & ... \end{pmatrix}$$

Обозначим через R линейный оператор с этой матрицей, $R:\mathbb{R}^{dn}\to\mathbb{R}^m$; $\{$ ИД$\} = KerR$.

Определение 1.6. *Внутренний стресс* (V, E, p) (self-stress, eguilibrium stress) - это функция $S: E \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \sum_{j:(i,j)\in E} S_{ij}(\overrightarrow{p_i} - \overrightarrow{p_j}) = 0.$$

Физический смысл: если заменить ребра (V, E, p) на пружинки со сжатиями S_{ij} (или растяжениями - в зависимости от знака), то система останется в равновесии.

Обозначим через S множество всех внутренних стрессов. Это линейное пространство, ядро оператора с транспонированной матрицей $R^\top$, т.е. ядро оператора $R^\top : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{nd}$.

$dim(Im(R^\top)) + ker(R^\top) = m$.

С другой стороны, легко убедиться, что $(Im(R^\top))^\perp =$ ИД. Таким образом получаем: dim ИД$= nd - dim(Im(R^\top)) = dn - m + ker(R^\top)$. В частности, если $d = 2$ (то есть механизм плоский), то получаем

$$dim(\text{ИД}) = 2n - m + dimS, \qquad (*)$$

где dim(ИД) - размерность пространства инфинитезимальных движений, $dimS$ - размерность пространства стрессов.

Замечание 1.7. Добавление ребра в механизм (V, E, p) означает добавление новой строки к матрице R. Эта операция не меняет $\{$ИД$\}$, тогда и только тогда, когда новая строка принадлежит линейной оболочке уже имеющихся строк.

Значит, замыкание по жесткости совпадает с матроидным замыканием из примера 5, где в качестве S берется множество строк матрицы жесткости $R(V, K(V), p)$, где $K(V)$ - полный граф с вершинами V.

Замечание 1.8. Пусть $dimS > 0$. Тогда можно убрать одно ребро из (V, E, p) так, что $\{$ИД$\}$ останется тем же.

Действительно, пусть на ребре e некоторый стресс не обращается в ноль. Тогда при его стирании $dimS$ уменьшится на 1, m уменьшится на 1, поэтому по формуле (*) размерность dim(ИД) не изменится.

E-mail address: marinakn@mail.ru