ШАРНИРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И 3D-LIFT

записано Князевой М.

1. Пример

Рассмотрим случай $d = 1$ (граф вкладывается в прямую). При этом
Жесткость графа есть его связность
Минимально жесткий граф = дерево
Граф с ненулевым стрессом = цикл
Замыкание по жесткости = замыкание по связности

Теорема 1.1. *Замыкание по жесткости есть замыкание строк матрицы жесткости полного графа (см. пример 5 из предидущей лекции).*

Доказательство. Рассмотрим вершины i, j, k и ребра, их соединяющие. В матрице жесткости строки, соответствующие этим ребрам (обозначим соответствующие им строки матрицы жесткости R_{ij}, R_{jk}, R_{ik}), будут состоять из нулей за исключением двух элементов в каждой из этих строк.

$$\begin{pmatrix}
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & 0 & p_i - p_j & 0 & ... & 0 & p_j - p_i & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & p_j - p_k & ... & 0 & p_k - p_j \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & 0 & p_i - p_k & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & p_k - p_i \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{pmatrix}$$

Операция амыкания не изменится, если строки матрицы разделить на константы.

$$\begin{pmatrix}
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & ... & ... & ... & ... & ... & 1 & ... & 0 & -1 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & -1 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{pmatrix}$$

Тогда для новой матрицы получаем, $R_{ij} + R_{jk} = R_{ik}$, а это значит, что если в графе есть ребра R_{ij}, R_{jk}, то как в замыкание графа по жесткости, так и в замыкание по строкам попадает ребро ik.

Следовательно, если две вершины соединены цепочкой из ребер графа, то в оба замыкания попадает ребро с концами в этих вершинах.

Мы показали, что , что для любого подмножества ребер полного графа T справедливо $< T >$ *по связности* $\subseteq < T >$ *по линейности.*

Докажем в обратную сторону.

Пусть вершины 1 и 2 соединены цепочкой из ребер графа, т.е. $R_{12} = \sum_{(i,j)} a_{ij} R_{ij}$. Пусть эта сумма минимальна (в смысле числа слагаемых).

Рассмотрим ребра, у которых коэффициент $a_{ij} \neq 0$ (множество таких ребер обозначим $\widetilde{E}$). Заметим, что

- $\widetilde{E}$ не содержит циклов (иначе можно уменьшить число слагаемых, воспользовавшись тем, что сумма строк по циклу равна нулю),
- $\widetilde{E}$ не содержит висячих вершин кроме 1 и 2.

Получаем, что $\widetilde{E}$ - путь из вершины 1 в вершину 2. □

Теорема 1.2. ***Ламана.***

Шарнирный механизм (V, E, p) в плоскости ($d = 2$) такой, что p - общего положения, $\#(V) = n, \#(E) = m$, является минимально жестким $\Leftrightarrow$

(1) $m = 2n - 3$
(2) *любое k-элементное V' подмножество V порождает не более чем $2k - 3$ ребра.*

Замечание 1.3. Для произвольного d теорема верна в сторону $\Rightarrow$ (но вместо $m = 2n - 3$ возникает $m = dn - dim(\text{ИД})$). А обратное неверно (контр пример - "двойной банан").

Доказательство. (только $\Rightarrow$)

Для плоского шарнирного механизма($d = 2$)

$$dim(\text{ИД}) = 2n - m + dimS, \qquad (*)$$

где $dim(\text{ИД})$ - размерность пространства инфинитезимальных движений, $dimS$ - размерность пространства стрессов.

Т.к. (V, E, p) минимальный жесткий, то $dim(\text{ИД}) = 3$ и $dimS = 0$ (У шарнирного механизма с ненулевым стрессом, ребро с ненулевым стрессом можно отбросить, не изменяя размерность пространства инфинитезимальных движений). Из (*) получаем $m = 2n - 3$.

Пусть $\#(V') = n'$; V' порождает более $2k - 3$ ребра. Для подграфа V' имеем $dim(\text{ИД'}) \geq 3$, $2n' - m' < 3$, откуда следует (из (*) для нового графа), что $dimS' \neq 0$. Если у подграфа есть ненулевой стресс, то и у самого графа тоже. Так, (V, E, p) имеет ненулевой стресс и по (*) для всего графа (V, E, p) получаем $dim(\text{ИД}) > 3$. Противоречие. □

Определение 1.4. Такие графы для $d = 2$ называются *ламановыми.*

Следствие 1.5. *Граф ламанов $\Leftrightarrow$ $dim(\text{ИД}) = 3$ и $dimS = 0$.*

2. 3D-lift

Определение 2.1. Пусть (V, E, p) - связный ШМ в плоскости без самопересечений. Тогда фунция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *3D-lift'ом ШМ-а* (V, E, p), *если*

(1) f *- непрерывная;*
(2) f *- линейная на каждой области разбиения (ШМ на плоскости рассматриваем как разбиение плоскости на куски).*

Вот еще одно определение 3D-lift'a , которым и будем пользоваться:

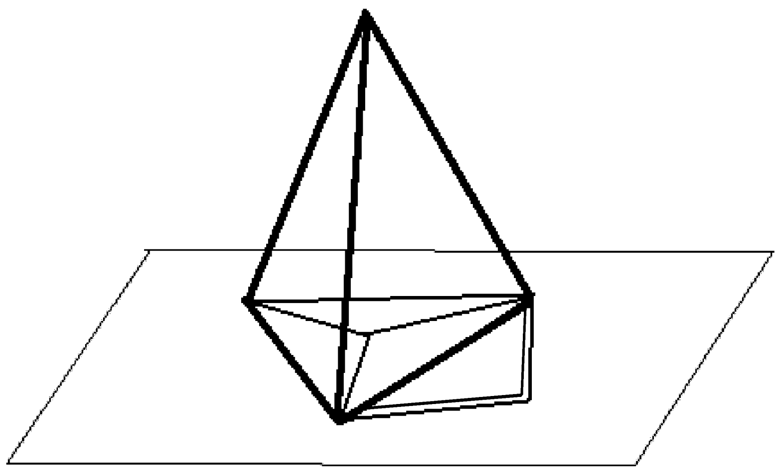
Определение 2.2. Пусть (V, E, p) - связный ШМ в плоскости без самопересечений. Тогда фунция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *3D-lift'ом ШМ-а* (V, E, p), *если*

(1) f *- непрерывная;*
(2) f *- линейная на каждой области разбиения (ШМ на плоскости рассматриваем как разбиение плоскости на куски);*
(3) $f \equiv 0$ *на неограниченной области разбиения.*

Замечание 2.3. Такие функции образуют линейное пространство.

На рисунке изображен ШМ (на плоскости) и график его 3D-lift-a.

Рисунок 2.4.



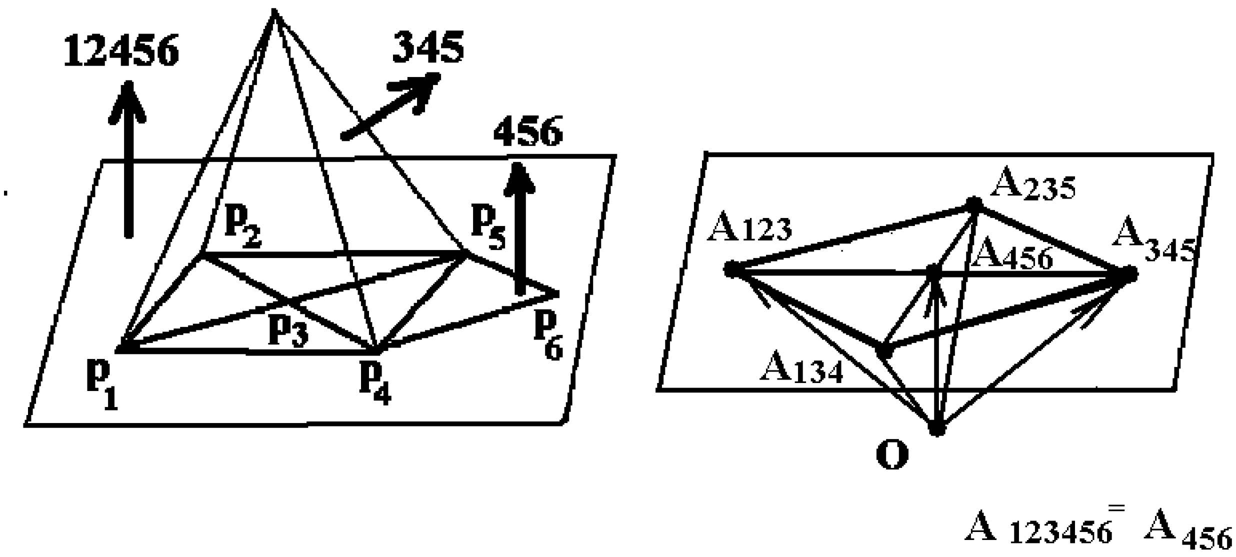
Теорема 2.5. *Множество 3D-lift'ов и множество стрессов канонически изоморфны:*

$$\{\mathit{3D\text{-}lift}((V, E, p))\} \cong S(V, E, p)$$

Доказательство проведем на конкретном примере без общих обозначений.

1. Покажем, как по 3D-lift'у определить стрессы для соответствующего ШМ. Для каждой грани 3D-lift'a (в том числе и для неограниченной) возьмем нормаль, смотрящую вверх. Затем все нормали рисуем исходящими из одной точки O. Вектора продлеваем до пересечения с плоскостью, параллельной горизонтальной, над точкой O. Полученные точки соединяем отрезком, если соответствующие грани 3D-lift'а делили ребро. Получаем т.н. *двойственную диаграмму Максвелла.* 3D-lift и его диаграмма Максвелла двойственны: ребрам одного соответсвуют ребра второго (причем они перпендикулярны); граням соответствуют вершины.

Рисунок 2.6.



Отрезок на двойственной диаграмме Максвелла имеет следующий физический смысл: при вращении плоскости грани (соответствующей одному из концов отрезка) к соседней грани (соответствующей второму из концов отрезка) вокруг общего ребра нормаль "заметает"именно исходный отрезок.

Значения стрессов определяются по следующей формуле:

$$s_{12} := \frac{\pm|A_{123}A_{12456}|}{|p_1p_2|}$$

Знаки в этой формуле определяются выпклостью / вогнутостью поверхности 3D-lift'а вдоль ребра:

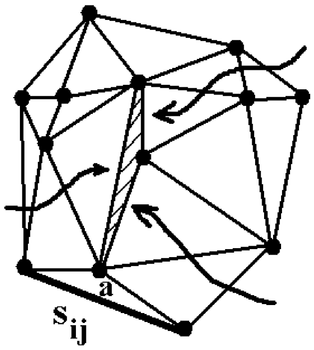
если поверхность 3D-lift'а выпукла вверх, то знак $+$;

если поверхность 3D-lift'а выпукла вниз, то знак -.

2. Покажем теперь как по графу со стрессом построить 3D-lift.

На внешней области положим $f \equiv 0$. Пусть область разбиения a соседствует с внешней областью вдоль ребра i, j. Тогда значения f на этой области определяются значением стресса на i, j (грубо говоря, значение стресса задает величину двугранного угла в графике 3D-lift-а над этим ребром. Далее становится возможным определить значение f на соседних с a граней.

Рисунок 2.7.



Нужно показать, что конструкция корректна - значение f не зависит от пути, по которому мы пришли к грани.Это равносильно тому, что при обходе по циклу, не будет получено противоречие. Этот факт нам известен для "маленьких"циклов - обходов вокруг вершин. А большой цикл раскладывается в сумму маленьких.

□

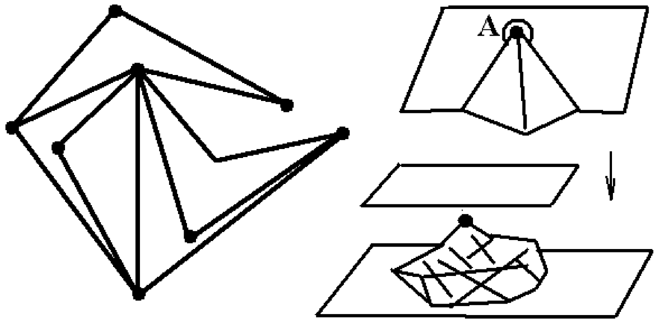
Пример 2.8. *Шарнирный механизм со свойством "pointed"(при любой вершине имеется угол больший* π*) не имеет внутреннего стресса.*

Доказательство. Свойством "pointed"графа означает, что при каждой вершине этого графа есть угол, больший π.

Пусть есть нетривиальный внутренний стресс. Тогда граф имеет нетривиальный 3D-lift. Так как у каждой вершины есть угол, больший π, то над этой вершиной "висит"*седловая вершина* графика 3D-lift-a.

(Точка x на поверхности называется седловой, если любая плоскость, содержащая x, пересекает поверхность локально более чем в одной точке)

Рисунок 2.9.



Так как 3D-lift ограничен, если приближаться к нему сверху некоторой плоскостью, то рано или поздно появится единственная точка касания. Противоречие. □

E-mail address: `marinakn@mail.ru`