ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ПЛОТНИЦКОЙ ЛИНЕЙКЕ. КОНСТРУКЦИИ ХЕННЕБЕРГА

записано Князевой М.

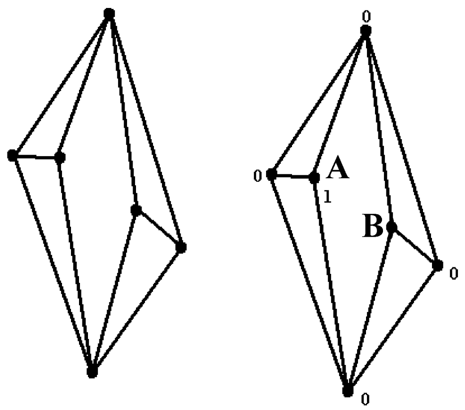
1. Теорема Штейница

Будем рассматривать *вложения* графов в плоскость, т.е. пересечения ребер не допускается.

Следующий пример показываеет, что иногда с 3D-lift'ами работать проще, чем со стрессами.

Пример 1.1. *Имеет ли граф, приведенный на рисунке, нетривиальный стресс?*

Рисунок 1.2.



Проще строить не стресс, а 3D-lift, имея ввиду Теорему 2.5 из лекции 6. Полагаем функцию 3D-lift'а равной нулю в каждой крайней точке (см. рис.), вершину A поднимаем, например, на 1. Таким образом, определены две левые грани графика 3D-lift'а и четырехугольная средняя грань. Вершину B опускаем так, чтобы она принадлежала этой четырехугольной грани и получаем 3D-lift.

А т.к. существует нетривиальный 3D-lift, существует и нетривиальный стресс.

Растяжения.

Рассмотрим шарнирный механизм $(V, K(V), p)$, где $K(V)$ - полный граф с вершинами $V, \#(V) = n$. Точкам приписываем вектора скорости

$u_i \in \mathbb{R}^2$; они образуют вектор $u \in \mathbb{R}^{2n}$. Положим $l_{ij} = (\overline{p_i} - \overline{p_j})(\overline{u_i} - \overline{u_j})$. Вектор $l = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{C_n^2}$ называем *растяжением*, порожденным движением u.

Теорема 1.3. *Пространство стрессов - ортогональное дополнение пространства растяжений:* $S = (\{l\})^\perp$

Доказательство.

Вспомним, что $S = Ker(R^\top)$, где $R = R(K(V))$ - матрица жесткости полного графа $K(V)$. Из определения следует, что $\{(l)\} = ImR$.

Нужно доказать, что $\forall u \quad (s, l(u)) = 0 \Leftrightarrow s \in S$.

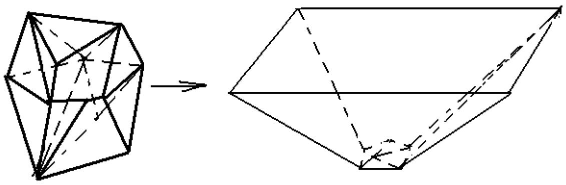
Заметим, что $\forall u \quad (s, l(u)) = 0 \Leftrightarrow s^\top \cdot l(u) = 0 \Leftrightarrow (s^\top \cdot R) \cdot u = 0 \Leftrightarrow (R^\top \cdot s)^\top \cdot u = 0 \Leftrightarrow R^\top \cdot s = 0 \Leftrightarrow s \in S$. □

Теорема 1.4. *(см. например курс 2006 "Комбинаторика многогранников")*

Если G - планарный граф, то он допускает вложение в плоскость $\mathbb{R}^2$, такое, что каждое его ребро - отрезок.

Доказательство этой теоремы использует теорему Штейница о том, что планарный 3-связный граф может быть реализован как реберный граф некоторого выпуклого многогранника. Далее одна из его граней сильно "раздувается"подходящим проективным преобразованием, и многогранник проецируется на эту большую грань. Получается вложение графа, порождающее выпуклый многоугольник с разбиением внутренности на выпуклые области.

Рисунок 1.5.



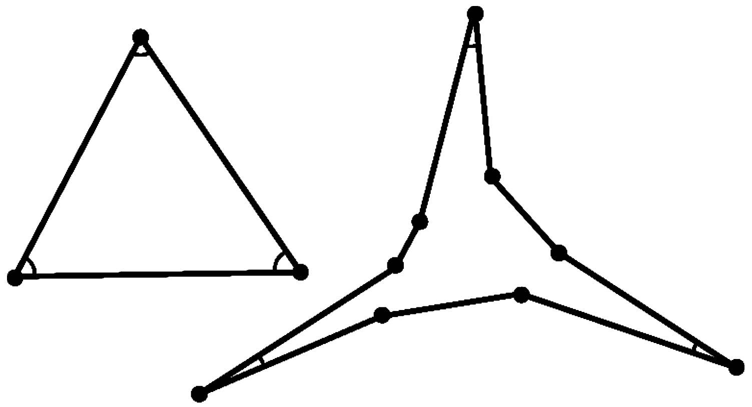
Однако иногда более удобно использовать максимально невыпуклые разбиения.

2. Псевдотриангуляции

Определение 2.1. Псевдотреугольник - многоугольник ровно с тремя выпуклыми (меньше π) углами.

На рисунке приведены примеры псведотреугольников.

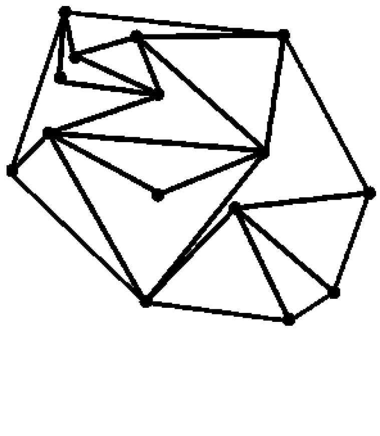
Рисунок 2.2.



Определение 2.3. "Pointed"псевдотрингуляция - выпуклая область на плоскости, разбитая на псевдотреугольники так, что каждая вершина обладает свойством "pointed"(существует угол, прилегающий к этой вершине, больше π).

На рисунке приведен пример pointed псведотрингуляции.

Рисунок 2.4.



Лемма 2.5. *G порождает pointed псевдотриангуляцию $\Rightarrow m = 2n - 3$.*

Доказательство.

Обозначим через f число областей разбиения псевдотриангуляции. Тогда из формулы Эйлера получаем:

$$n - m + f = 2$$

Заметим, что углов всего $2m$, из них углов, больших π, всего n. Число выпуклых углов с одной стороны равно $2m - n$, а с другой стороны равно $3(f - 1)$. Тогда получаем:

$$3(f - 1) = 2m - n$$

Объединив эти формулы, получим:

$$m = 2n - 3$$

□

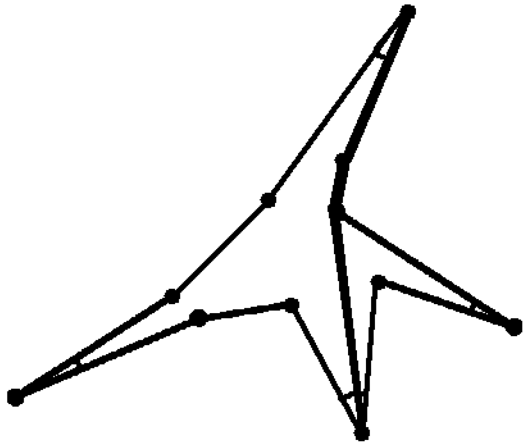
Лемма 2.6. *Свойство pointed наследственное, т.е. передается от графа к подграфу.*

Лемма 2.7. *pointed вложение графа может быть дополнен до псевдотриангуляции.*

Доказательство основывается на рассмотрении различных возможных случаев. Например, дополнение графа до выпуклой оболочки вложения сохраняет свойство pointed. Если есть область разбиения с более, чем тремя выпуклыми уголами, то эту область можно разбить на несколько с помощью т.н. "натягивания веревки"между двумя несоседними вершинами: добавляется кратчайший путь из одной вершины в другую. Частично он может пройти по ребрам, но в любом случае приведет к разбиению области на более мелкие части с сохранением свойства pointed.

На рисунке жирной линией обозначена линия разбиения.

Рисунок 2.8.



Таким образом можно разбить область до псевдотреугольников. □

Теорема 2.9. *Граф $G(V, E, p)$ - некоторый граф без самопересечений. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G порождает pointed псевдотриангуляцию.*
(2) *G - максимальный pointed граф, т.е. к нему нельзя добавить нового ребра с сохранением свойства pointed.*
(3) *Области разбиения - псевдотреугольники и $m = 2n - 3$.*
(4) *$m = 2n - 3$ и граф pointed.*

Следствие 2.10. *G порождает pointed псевдотриангуляцию $\Rightarrow$ G ламанов.*

Доказательство следствия:

Т.к. G порождает pointed псевдотриангуляцию, то $m = 2n - 3$ (по лемме 2.5). Осталось показать, что такой подсчет верен и для любого подграфа с k вершинами. По лемме 2.6 подграф будет тоже pointed, а по лемме 2.7 он может быть дополнен до псевдотриангуляции. □

Доказательство теоремы следует из лемм 2.5 - 2.7 и из свойств ламановости (мин. жесткость и ламанов подсчет).

Задача. Докажите равносильность пунктов 1 и 3. □

3. Доказательство теоремы о плотницкой линейке

Напомним, что алгоритм распрямления плотницкой линейки предполагает добавление новых ребер двух типов: дополнения до выпуклой оболочки (1 тип) и добавление максимального количества ребер с сохранением свойства pointed (2 тип). В результате получается некоторый ламанов граф G. Если теперь удалить одно из ребер 1 типа, то полученный граф станет подвижным. Если раздвигать в стороны вершины, прежде соединенные удаленным ребром, то расстояния между любыми вершинами графа не уменьшается (т.н. expancive motion).

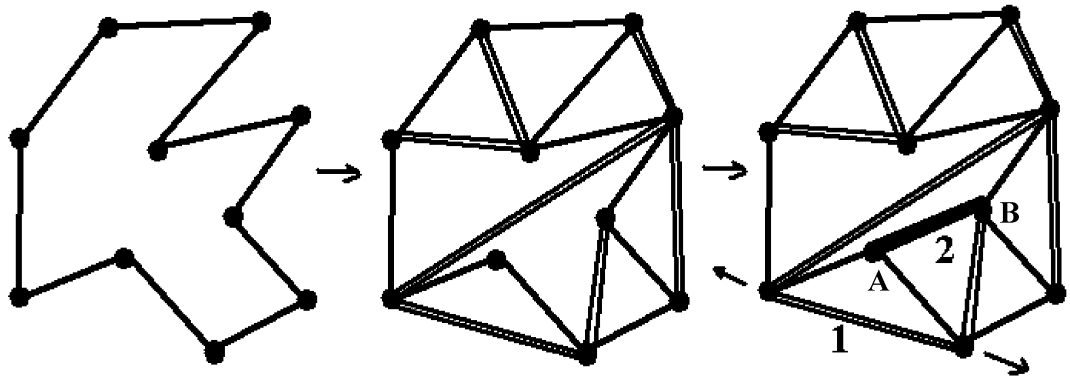
Докажем более легкое утверждение:

Теорема о плотницкой линейке.

При таком движении (см. выше) расстояние не уменьшается между вершинами, которые в графе могут быть соединены отрезком без пересечения других ребер графа.

Пусть мы убираем ребро 1 (первого типа). Добавим ребро 2 к графу G (см. рисунок). Естественно, при этом нарушается свойство pointed.

Рисунок 3.1.



Граф $G \cup \{2\}$ имеет внутренний стресс s.

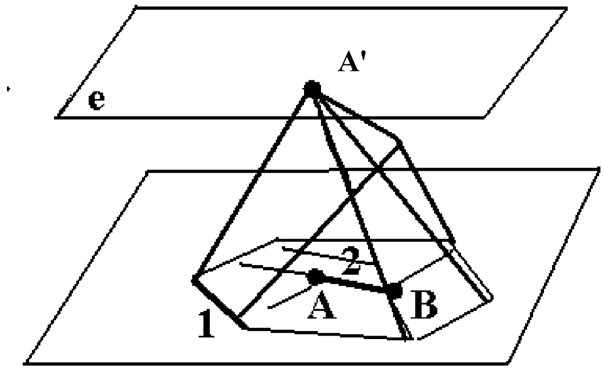
Докажем, что $s(1) \cdot s(2) < 0$.

Пусть $s(1) < 0$. Построим 3D-lift для графа $G \cup \{2\}$. Т.к. $s(1) < 0$, ребро 1 выпукло вниз, значит график частично лежит в полупространстве z^+.

Над каждой pointed точкой "висит"седловая вершина 3D-lift'а (см. пример 2.8 из предидущей лекции).

Рассмотрим некоторую почти горизонтальную плоскость e и будем опускать ее до пересечения с 3D-lift'ом. Точка касания обязательно будет либо над вершиной A графа, либо над B.

Рисунок 3.2.



Предположим, что $s(2) < 0$. Тогда ребро 3D-lift'а над ребром 2 графа G выпукло вниз. Это значит, что все выпуклые вверх ребра, прилегающие к вершине А лежат по одну сторону от некоторой вертикальной плоскости, проходящей через А. Такого не бывает.Действительно, возьмем плоскость e в момент касания с А. Будем вращать ее вокруг точки А так, чтобы полуплоскость, висящая над выпуклыми вниз ребрами, поднималась. Рано или поздно плоскость коснется поверхности по ребру, которое выпукло вверх - такого не может быть. Противоречие.

Этот стресс порождает стресс графа $K(V)$ (на ребрах графа $K(V)$ G полагаем его равным нулю)

Занумеруем ребра $K(V)$ так: сначала идут 1 и 2, потом ребра G, потом все остальные. Выпишем стресс.

$$s = (-, +, ?, ..., ?, 0, ..., 0).$$

Граф $G \backslash \{1\}$ подвижный. Рассмотрим его инфинитезимальное движение. Оно порождает растяжение l на $K(V)$:

$$l = (l_1, l_2, 0, ..., 0, ?, ..., ?).$$

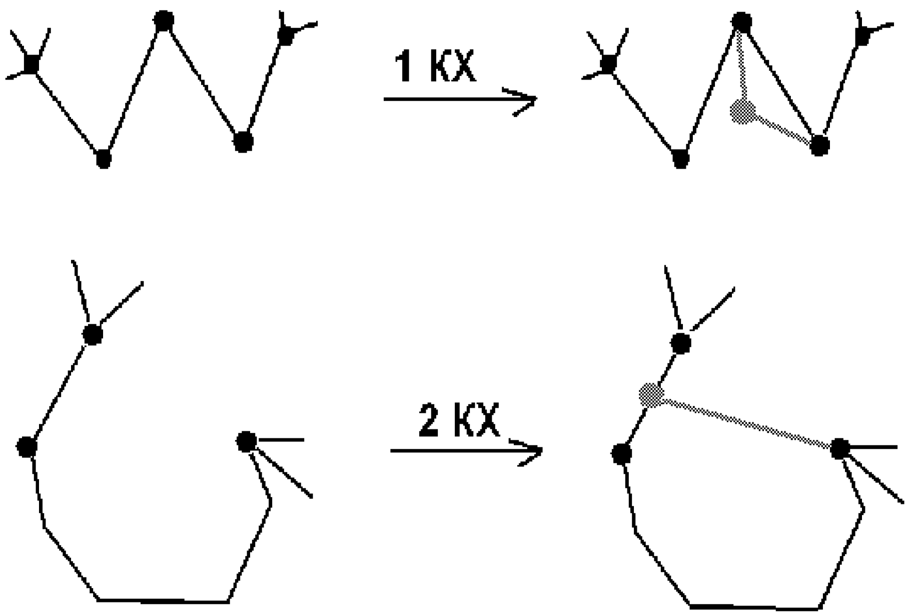
А так как $s \perp l$, получаем $l_1 \cdot l_2 > 0$ (одного знака). Это означает, что если расстояние между концами удаленного ребра 1 возрастает, то расстояние между точками А и В (концами ребра 2) тоже возрастает. А т.к. ребро 2 выбиралось любое (не нарушающее планарности графа), то теорема доказана (точнее, более легкое утверждение, сформулированное выше). $\square$

При таком раздвижении вершин графа в определенный момент у них будет исчезать свойство pointed. В алгоритме распрямления плотницкой линейки описаны операции, которые позволяют в таких случаях продолжить алгоритм.

4. Конструкции Хеннеберга

Это комбинаторные локальные перестройки графа, не меняющие его жесткость.

Рисунок 4.1.



1 конструкция Хеннеберга: добавляется новая вершина, которая соединяется ребрами с двумя старыми вершинами.

2 конструкция Хеннеберга: добавляется новая вершина на старом ребре (это старое ребро превращается в два новых ребра) и новая вершина соединяется с некоторой старой вершиной.

Теорема 4.2. Γ - *ламанов* ⇔ Γ *получается цепочкой конструкций Хеннеберга из графа с двумя вершинами и одним ребром (отрезок).*

Доказательство.

1. Если граф может быть получен цепочкой КХ из отрезка, то он ламанов. Это следует из того, что КХ не нарушают жесткости графа: можно рассмотреть различные случаи применения 1 и 2 КХ и проверить, что "ламанов подсчет"сохраняется.

2. Покажем, что если граф G ламанов, то он может быть получен цепочкой КХ из отрезка. Достаточно показать по индукции, что G - некоторая КХ, примененная к некоторому ламанову графу.

Т.к. граф ламанов, то $m = 2n - 3$. Значит найдутся вершины валентости 2 или 3.

Если вершина ламанова графа имеет валентость 2, то удаление ребер, исходящих из этой вершины и самой вершины не портит ламановость графа , т.к очевидно сохраняется минимальная жесткость.

Если валентоность вершины равна 3, то необходимо произвести операцию, обратную к 2 КХ, чтобы получить ламанов граф. Для этого мы удаляем все ребра, исходящие из этой трехвалетной вершины и вклеиваем одно ребро так, чтобы получить ламанов граф. Для этого понадобится понятие максимальной компоненты жесткости.

Определение 4.3. *Максимальной компонентой жесткости называется (два эквивалентных определения):*

- *подграф G, порожденный k врешинами с $2k-3$ ребрами;*
- *жесткий подграф, максимальный (по включению).*

Заметим , что

- две максимальные компоненты жесткости пересекаются не более, чем по одной вершине;
- вершины 2, 3, 4 лежат в разных компонентах жесткости.

Значит, какие-то из них (например, 2 и 3) не лежат в одной компоненте жесткости. Их можно соединить ребром. При этом получим ламанов граф (это следует из ламановых подсчетов). □

Теорема 4.4. *Если граф G ламанов и планарен, то его можно вложить в плоскость в виде pointed псевдотриангуляции.*

Идея доказательства.

Ламанов граф G, как комбинаторный объект, может быть представлен как последовательность КХ 1 и 2 рода. Каждый шаг в обратную сторону (от отрезка к графу G) может быть реализован геометрически. Это проверяется "в лоб перебором различных возможных ситуаций. □

Заметим, что на каждом шаге при движении от отрезка к графу G, граф меняется лишь локально, в небольшой окрестности вершин, затронутых преобразованием. Поэтому алгоритмы, использующие невыпуклые вложения, работают быстро.

E-mail address: `marinakn@mail.ru`