ШАРНИРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ НА СФЕРЕ

записано Князевой М.

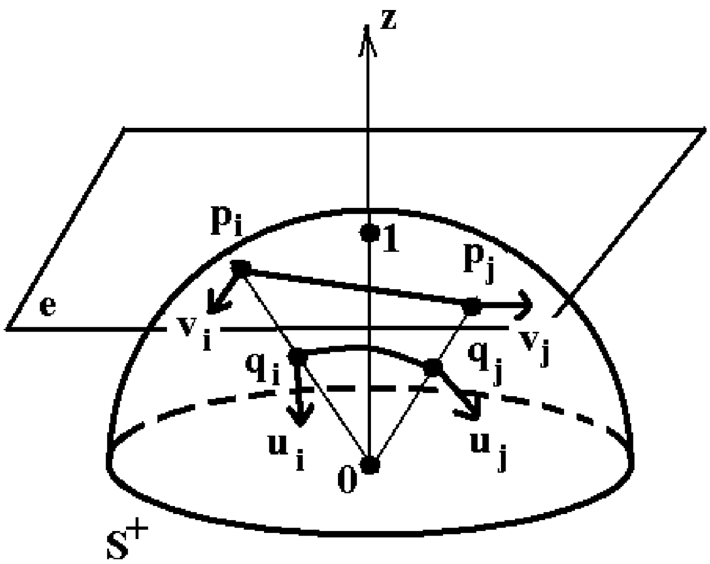
Перенесем все конструкции и понятия, рассмотренные ранее на плоскости, на двумерную сферу и выясним, какие при этом возникают особенности.

Пусть S - двумерная сфера, S^+ - верхняя полусфера. Все определения (шарнирные механизмы, инфинитезимальные движения, внутренний стресс и т.д.) естественно переносятся с плоскости на сферу.

Пусть шарнирный механизм полностью лежит в верхней полусфере. Покажем, что ему можно сопоставить плоский ШМ так, что инфинитезимальные движения шарнирного механизма на полусфере задают инфинитезимальные движения соответствующего шарнирного механизма на плоскости и наоборот.

Пусть q_i, q_j - вершины шарнирного механизма $(V, E, q), q : V \to S^+$ на единичной полусфере S^+ с центром в точке O. Пусть эти вершины соединены ребром.

Рисунок 1.1.



Пусть ось z направлена вверх, ортогонально плоскости экватора полусферы. Пусть z_i, z_j - z-координаты точек q_i, q_j. Рассмотрим плоскость $e : z = 1$. Вектор $\overline{e}$ - нормаль плоскости e. Шарнирному механизму (V, E, q) поставим в соответствие шарнирный механизм (V, E, p);

$p : V \to \mathbb{R}^2 = \{z = 1\}$. (Мы проецируем сферический ШМ из точки O на плоскость e.) При этом точкам q_i первого ШМ соответствуют точки p_i второго ШМ. Иначе говоря,

$$p_i = (\frac{x_i}{z_i}; \frac{y_i}{z_i}; 1).$$

Пусть набор векторов $\{\overline{u_i}\}$ задает инфинитезимальное движение ШМ (V, E, q) на полусфере. Тогда положим:

$$v_i = \frac{1}{z_i}(\overline{u_i} - (\overline{u_i}; \overline{e})\overline{e}).$$

Этот набор векторов есть ИД плоского шарнирного механизма (V, E, p). Действительно,

$$(\overline{p_i}-\overline{p_j}; \overline{v_i}-\overline{v_j}) = (\frac{\overline{q_i}}{z_i}-\frac{\overline{q_j}}{z_j}; \frac{1}{z_i}(\overline{u_i}-(\overline{u_i}; \overline{e})\overline{e})-\frac{1}{z_j}(\overline{u_j}-(\overline{u_j}; \overline{e})\overline{e})) = \frac{1}{z_i z_j}(\overline{q_i}-\overline{q_j}; \overline{u_i}-\overline{u_j}) = 0,$$

В этом легко убедиться, воспользовавшись дистрибутивностью скалярного произведения и равенствами $(\overline{q_i}; \overline{u_i}) = 0, (\overline{q_i}; \overline{e}) = z_i$.

Если ШМ не помещается в полусферу, то его можно преобразовать: ШМ $(V, E, q), q : V \to S$ сопоставляем новый ШМ $(V, E, q^+), q^+ : V \to S^+$, который вершину первого ШМ оставляет на месте, если она принадлежит верхней полусфере S^+, а вершине, не принадлежащей S^+, сопоставляет диаметрально противоположную точку сферы.

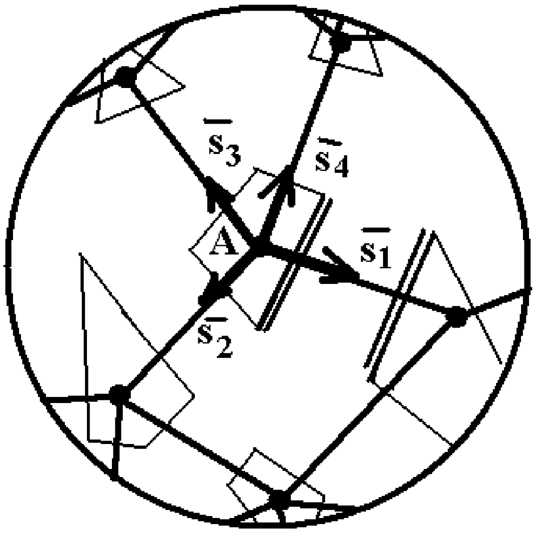
При этом движения одного ШМ порождают движения другого.

Таким образом, для шарнирных механизмов на сфере справедливы многие утверждения, что и для шарнирных механизмов на плоскости. Сохраняются все факты и конструкции, в которых не затронута вложенность графов. Например, для шарнирных механизмов на сфере справедлива теорема Ламана.

3D-lift и диаграммы Максвелла для ШМ на сфере.

Рассмотрим вложение (V, E, p) в сферу S (т.е. ребра ШМ не пересекаются). Пусть ШМ имеет всюду положительный стресс (напомним, что на плоскости таких ШМ не бывает). Пусть A - четырехвалентная вершина ШМ, s_1, s_2, s_3, s_4 - стрессы выходящих из нее ребер.

Рисунок 1.2.



Вершине A сопоставим четырехугольник, ребра которого перпендикулярны ребрам s_i, а длины равны значениям стрессов этих ребер соответственно.

Над каждой вершиной ШМ на сфере "повесим"такие многоугольники, причем так, чтобы их нормали были сонаправлены с радиус-векторами соответствующей вершины. Заметим, что над соседними вершинами "висят" многоугольники, у которых есть по параллельному ребру одинаковой длины (т.к. соседние вершины имеют общее ребро). Склеим все многоугольники, "висящие"над вершинами ШМ (для этого подвинем многоугольники подходящими параллельными переносами). Получим трехмерный выпуклый многогранник K. А ШМ на сфере - веер этого многогранника. Стресс ребра веера равен длине соответствующего ребра многогранника.

(Понятия выпуклого многогранника, его опорной функции, веера, сферического веера и т.д. - см. осенний спецкурс.)

Если же рассмотреть ШМ на сфере с неположительным стрессом, то можно показать, что он является веером виртуального многогранника.

Имеется следующее соответствие, объединяющее теории виртуальных многогранников и шарнирных механизмов:

веер виртуального многогранника $\leftrightarrow$ граф, вложенный в сферу

длины ребер виртуального многогранника $\leftrightarrow$ внутренний стресс графа

опорная функция виртуального многогранника $\leftrightarrow$ 3D-lift вложенного графа

виртуальный многогранник $\leftrightarrow$ двойственная диаграмма Максвелла вложенного графа

E-mail address: `marinakn@mail.ru`