А. С. Лосев.
Тропическая геометрия и зеркальная симметрия.
Конспект записал Д. С. Павлов.

Местоположение предмета в современном здании математики.

Чем занимаются математики? Давний ответ: числами (алгеброй) и фигурами (геометрией). Эти две науки постоянно разговаривают друг с другом. Потом появились смежные науки: алгебраическая геометрия. Она началась с большой теоремы Ферма. Идея решения уравнения Ферма заключалась в рассмотрении поверхности, которую оно задаёт и поиске на ней целых точек.

Другая смежная наука: алгебраическая топология. Науку эту придумал Пуанкаре. Пуанкаре предложил изучать инварианты пространств при непрерывных деформациях. Инварианты оказались алгебраическими структурами. Пуанкаре придумал, что фигуры можно мять.

Откуда вообще берутся алгебраические структуры? Откуда взялись числа? Камешки делили и соединяли на кучки. Все структуры пришли как инварианты из геометрии. Согласно этой философии люди придумали числа как объекты счёта камешков, но забыли про это. Коммутативность и ассоциативность — крутим прямоугольники и параллелепипеды.

Математики делятся на обычных и великих. Обычные математики доказывают теоремы, выдвигают гипотезы, получают премии. Великие математики придумывают новые правила игры (миры). Гротендик поссорился со своей школой, потому что он открыл им много миров, а его школа не захотела туда идти. Пуанкаре тоже придумал новые миры.

Новые миры — это новый взгляд на числа и фигуры.

Что такое тропическая программа?

Тропическая программа — это взгляд на алгебраическую геометрию (и квантовую теорию поля), который говорит, что многие структуры алгебраической геометрии имеют комбинаторное описание (1). Есть специальные структуры, которые не имеют такого описания (2). Тропическая программа предлагает разделить такие структуры, и сказать, что алгебраическая геометрия сводится к (1) и содержательной части (2).

Всё это имеет физическую параллель: алгебраическая геометрия аналогична квантовой теории поля, а тропическая геометрия аналогична пертурбативной квантовой теории поля, а дополнительный элемент соответствует S-двойственности.

Пример: в теории струн основным объектом является отображение римановой поверхности в многообразие. У этих отображений есть предел, при котором риманова поверхность сводится к графу. Почти все свойства теории струн видны в этом пределе. А что не видно? Пример: в торе меридиан и параллель не отличимы. При вырождении тора между ними появляется различие. Это очень важно. Тропический предел различает меридиан и параллель. Тропический предел сводит теорию струн к квантовой теории поля. Задача заключается в том, что узнать какие теории поля пришли из теории струн. В математики, задача состоит в том, чтобы понять, какие комбинаторные задачи пришли из алгебраической геометрии.

Кто этим занимается и какие тексты есть? Григорий Михалкин, у которого есть недописанная книга на сайте и доклад на конгрессе. Hannah Markwig, у неё на домашней странице есть текст.

Что надо сделать? Тропически иллюстрированный учебник алгебраической геометрии. Почти все теоремы до размерности 3 можно нарисовать.

Чем мы будем заниматься? Мы хотим овладеть сутью предметы. Шлифовкой взглядов можно заняться потом. В конце будут от 5 до 10 несделанных задач. А ещё есть зеркальная (миррор) симметрия. Это — равенство двух частей. Слева — производящие функции перечислительных (энумеративных) задач, а справа — теория деформации структур алгебраической геометрии.

Пример: возьмём n совпадающих точек и будем факторизовать из по группе симметрий. Получится $1/n!$. Имеем производящую функцию $\sum_n t^n/n! = \exp(t)$. Оказывается, что $(d/dt - 1)\exp(t) = 0$.

Например, решая уравнения $x+m=n$, где m и n — положительные числа, получаем целые числа. Тоже самое можно делать с векторными расслоениями. Получится K-теория. Если решать уравнения $x^2 = -1$ и $x^2 = 2$ получаем комплексные и алгебраические числа. Если решать уравнения вида $p^2 = q$ в полиномах, то получим римановые поверхности. Если решать дифференциальные уравнения вида $p' = p$, то получим экспоненту. Спецфункции расширяют пространство полиномов при помощи решения дифференциальных уравнений. Все свойства экспоненты закодированы в её уравнении. Тоже самое для логарифма, который уже не является функцией.

Вернёмся к экспоненте. Она периодична с периодом $2\pi i$. Это — чудо.

Пример с функцией Дедекинда $\prod_{n>0}(1-q^n)^{-1} = \sum_k c_k q^k$. Здесь c_k — число способов разбить k на слагаемые. Если обе части умножить на $q^{-1/24}$ то получится модулярная форма $\eta(\tau)$: $q = \exp(2\pi i\tau)$, $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\tau$.

Вопрос: какие производящие функции ведут себя хорошо, как экспонента или эта-функция и каким уравнениям они подчинены.

Зеркальная симметрия — это пример содержательного ответа на этот вопрос. С одной из точек зрения она говорит, что производящая функция для числа голоморфных отображений из римановой поверхности в многообразие, проходящих через заданный набор циклов, связана с теории периодов некоторого зеркального многообразия.

Что такое период? Пусть у нас есть тор и голоморфная дифференциальная форма на нём. Поставим им в соответствие пару чисел — интеграл формы по параллели и меридиану. Если проективизировать получившиеся пары чисел, то получим отображение из комплексных торов в комплексную проективную прямую. (Форма на торе определяется однозначно с точностью до константы.) Но вся конструкция зависит от выбора базиса. Надо смотреть, как группа, переставляющая базисы ($\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$) действует на результат.

А почему имеется такая связь? Пока непонятно. Один ответ мы разбирать не будем: теория голоморфных отображений — это некоторая двумерной конформная теория поля типа А (в которой есть производящие функции), которая эквивалентна некоторой другой конформной теории поля типа Б, в которой есть теория периодов.

Но это очень сложно. Можно проще. Есть такая вещь как тропикализация, которая сильно упрощает дело. При ней двумерная конформная теория поля типа А переходит в квантовую механику, а теория типа Б перейдёт в некоторую другую квантовую механику. Между конформными теориями поля стояла Т-дуальность, а между квантовыми механиками стоит преобразование Фурье, которое проще. Мы не будем заниматься конформной теорией поля. На стороне теории отображений периодов мы увидим обобщённые деформации комплексных структур по Баранникову-Концевичу.

Согласно современным идеям геометрии пространство является гомологическим многообразием с гомологическим векторным полем. Если есть вещественно двумерное многообразие с комплексной структурой, для него условие гомологичности векторного поля означает интегрируемость структуры. Деформация многообразия — это деформация гомологического векторного поля.

Проиллюстрируем на торе $T = \mathbf{C}/(1,\tau)$. Разные τ дают разные группы. Лучше считать, что многообразие как вещественное не деформируется, а деформируется некоторая структура на нём.

Причём здесь квантовая механика? У нас есть гильбертово пространство и гамильтониан $H = \{Q, G\}$. Связь с многообразиями такая: гомологическому векторному полю отвечает Q.

Что же такое тропический мир?

План: (1) Тропический мир — более детальные наброски; (2) удивительная наука дальше-дальше-дальше: запрет Громова — как его обойти; тропическая 2-зеркальная симметрия; суперсимметричный Янг-Миллс как извращение и возвращение в геометрию. Уиттен пишет книжку про топологический Янг-Миллс и супер-Ленглендс. И почему теория Янга-Миллса имеет тип $1/k$, а теория голоморфных отображений имеет тип k.

Итак, более детальные наброски тропического мира. Пусть Q зависит от некоторого параметра τ: $Q_\tau = Q + \tau V_1 + \tau^2 V_2$. Далее, $\bar\partial \to \bar\partial_0 + \tau\mu_1\partial + \tau^2\mu_2\partial + \cdots$. Всё это придумал Кодаира. Раньше люди думали, что алгебраическое многообразие — это уравнение и деформировали его коэффициенты. А Кодаира сказал: отождествим их как гладкие многообразия, и на них будут разные комплексные структуры. Но как произвести отождествление? Кодаира сказал, что если есть два разных способа отождествления, то такие способы надо считать эквивалентными. Поэтому надо изучать комплексные структуры по модулю диффеоморфизмов. За этой геометрией стоит интересная алгебра. Оказалось, что можно обобщить уравнение Кодаиры $(\bar\partial + \mu_\tau\partial)^2 = 0$. А именно, $\bar\partial$ заменяется на произвольное Q, а то, что под квадратом — на его деформацию. В Японии была хорошая школа дифференциальной геометрии.

В топологической квантовой механике имеем уравнение $H = \{Q_\tau, G\}$. Далее, уравнение эволюции имеет вид $\exp(tH_\tau) = \exp(tH_0) + \int_0^t dt' \exp((t-t')H_0)\tau\{G, V_1\}\exp(t'H_0) + 2^{-1}\int_0^t\int_0^t dt'dt'' \exp((t-t')H_0)\{G,V_1\}\exp((t'-t'')H_0)\{G,V_1\}\exp(t''H_) + \cdots$. Откуда это получается? Имеем: $\exp(tH_\tau) = f$, $(d/dt - H_\tau)f = 0$, $(d/dt - H_0 - \tau\{V,G\})f = 0$, и, наконец, $(L_0 + \tau L_1)(f_0 + \tau f_1 + \cdots) = 0$. Делаем так, чтобы $L_0 f_0 = 0$. Теперь $L_0 f_1 = -L_1 f_0$. Как решить такое уравнение? С помощью функции Грина: $f_1(t) = \int G(t,t')(L_1 f_0)(t')dt'$.

Аргумент Дайсона: квантовая электродинамика не аналитична по e, так как при замене e на ie происходит скачок физических явлений.

Экспонента оператора в гильбертовом пространстве не аналитична, если исходный оператор не ограничен.

Run away аргумент: берём ненулевое поле на многообразие, идём по нему и достигаем края многообразия за конечное время. В данном случае экспонента векторного поля не существует. Вообще говоря, экспонента — не ряд, а решение дифференциального уравнения. В частности, наше решение применимо не только для экспоненты, которая раскладывается в ряд, но для любой экспоненты, задаваемой уравнением.

Оказывается, тропическая версия голоморфного отображения — это график кусочно линейной функции (полиэдр). Например, тропическое отображение из проективной прямой в проективную прямую — это граф на плоскости, состоящий из конечных и бесконечных отрезков. Раньше мы считали голоморфные кривые, а теперь мы считаем ломаные.

Дальше-дальше-дальше. Был мир голоморфных отображений кривых. На другом конце был мир голоморфных отображений поверхностей. Между ними висит два научно-политических шлагбаума Уиттена и один научный шлагбаум Громова. Первый шлагбаум Уиттена (до 1997 года — второй струнной революции) — теория струн это теория всего, а зачем нужны поверхности, непонятно. Второй шлагбаум Уиттена: голоморфные отображения получаются твистованием суперсимметричных S-моделей, и потому они физичны, а голоморфные отображение поверхностей так не получаются, и потому нефизичны. Шлагбаум Громова: голоморфных отображений поверхностей не существует.

Разберём шлагбаум Громова. Вложим голоморфные отображения поверхностей в гладкие отображения поверхностей. Пусть Σ — поверхность, X — голоморфное многообразие, $f\colon \Sigma \to X$ и $z\colon X \to \mathbf{C}^d$, тогда $z \circ f\colon \Sigma \to \mathbf{C}^d$. Условие голоморфности: $\bar\partial z = 0$. Имеем $\dim_{\mathbf{C}} X \cdot \dim_{\mathbf{C}} \Sigma \cdot \dim \mathbf{C}(\Sigma)$ уравнений и $\dim_{\mathbf{C}} X \cdot \dim \mathbf{C}(\Sigma)$ неизвестных. В случае $\dim_{\mathbf{C}} \Sigma > 1$ имеем больше уравнений, чем неизвестных. Но не все многообразия являются полными пересечениями! Этот аргумент означает, что голоморфные отображения поверхностей в многообразие не являются полным пересечением в пространстве всех гладких отображений поверхностей в многообразие. Неполнота пересечения означает, что между уравнениями, его задающим, есть соотношения (сизигии). В данном случае сизигии задаются точными $(0, d-1)$-формами ω. В случае $d = 1$ таких форм нет. Сизигии имеют вид $\int \omega \wedge \bar\partial z = 0$.

Проблема с голоморфными отображениями поверхностей заключается в том, что это объявлено не физикой.

Конкретная задача: описать кольцо когомологий неполных пересечений в торических многообразиях.

Для полных пересечений задача решена.

Зачем это надо? В бесконечномерном случае ответом является четырёхмерная топологическая теория, локализующаяся на голоморфные отображения.

Что такое 2-зеркальная симметрия в тропической версии? Раньше мы интегрировали по положению точек, а теперь мы интегрируем по графам, которые надо воспринимать как графы Фейнмана. А что будет в случае нетропического предела? Графы превратятся в две струны нулей и полюсов.

Голоморфные отображения $\Sigma \to X$, где на X действует группа симметрий G. Как изучать инварианты? Строим комплекс Шевалле и изучаем его когомологии. Резюме: обычная теория инвариантов — это точка в $X \otimes \Pi G$, а наша — отображение $\Sigma \to X \otimes \Pi G$ — калибровочная теория с материей X. Следует изучать не это, а прямые вещи — отображения $\Sigma \to X$.

Сначала вспомним торическую геометрию.

Многие вещи люди представляют по разному. $\mathbf{R}$ — это либо прямая, либо открытый отрезок. $\mathbf{C}^*$ — это либо цилиндр, либо плоскость с выколотой точкой, либо сфера с двумя выколотыми точками. Разные модели имеют разную линейную структуру. Компактификация в каждом из случаев проводится по разному. На сфере хорошо видна топология, но плохо видно поле функций. На цилиндре хорошо видно поле функций, но плохо видна топология.

Мы изучим два взгляда на торическую геометрию, два взгляда на тропический предел и тропический взгляд на прямые в двумерном проективном пространстве (это основной пример). Торическое многообразие — это один многогранник, а тропическое — несколько.

Есть несколько подходов к торическим многообразиям. Один из них — традиционный подход алгебраической геометрии. Мы его изучать не будем. Вообще, есть два взгляда на многообразия. Один взгляд — внешний, многообразие вложено в векторное пространство. При таком подходе легко описывается касательное расслоение, векторное поле и другие понятия. А есть внутренний подход.

Мы начнём с внешнего подхода. Он ещё является нульмерной моделью калибровочной теории. Нестрогое определение: $\mathbf{C}^k/\mathbf{C}^{*n}$. Как $\mathbf{C}^{*n}$ действует на $\mathbf{C}^k$? Сначала скажем, что происходит в случае $n=1$. Имеем $\sum_i q_i z^i \partial/\partial z^i$. Поскольку действует $\mathbf{C}^*$, коэффициенты целые. В общем случае: $z_i \to \lambda_a^{q_i^a} z_i$. Здесь q — целочисленная матрица. Пусть $n=2$. Почему нельзя так просто брать $q=(1,1)$? Группа некомпактная, естественная метрика отсутствует. Решение проблемы заключается в выбрасывании некоторых орбит. Заметим, что $U(1) \subset \mathbf{C}^*$. Далее, $U(1)$ действует симплектически, сохраняя форму $\omega = 2\sqrt{-1}\sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i$. Есть гамильтониан $H^a = \sum_i q_i^a (z^i \bar{z}^i)$. Теперь наш объект заменяется на следующий: $(H^a = \mu^a)/(U(1))^n$.

На $\mathbf{C}^k$ действует $\mathbf{R}^+$. Стабильные орбиты пересекают поверхность моментов, нестабильные не пересекают. В случае, когда пересечение есть, оно единственно.

Пример: $\mathbf{C}/\mathbf{C}^* = (|z|^2 = \mu)/U(1)$, В случае $\mu > 0$ имеем точку, в случае $\mu < 0$ имеем пустое множество. Теперь рассмотрим $\mathbf{C}^2/\mathbf{C}^* = (q_1|z_1|^2 + q_2|z_2|^2)/(z_i \to \exp(iq_i\phi)z_i$. Введём новые координаты $x^i = |z^i|^2 = (r^i)^2$. При этом $x^i \geq 0$. Получим систему линейных уравнений $\sum_i q_i^a x_i = \mu_a$ и $x_i \geq 0$. Это — выпуклый многогранник.

В размерности 1 имеем отрезок либо луч. Отрезок соответствует комплексной проективной прямой, а луч — комплексной прямой. С внутренней точки зрения вертикальный луч не отличается от наклонного. Однако с внешней точки зрения их вложения отличаются.

Рассмотрим случай $\mathbf{C}^3/\mathbf{C}^*$. Случай $q=(1,1,1)$ тривиален, мы получаем $\mathbf{C}P^2$.

Вопрос: почему все (p,q,r)-симплексы изоморфны? Описать их топологию.

Задача: описать треугольник как компактификацию квадранта отрезком (то есть $\mathbf{C}P^1$).

В трёхмерном случае в качестве вырожденных примеров имеем $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C} \times \mathbf{C}P^1$ и $\mathbf{C}P^2$.

Мы рассматриваем то, что получилось после раздутия: $|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = \mu$, где $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \sim (\phi_1, \phi_2, \phi_3) + (\epsilon, \epsilon, -\epsilon)$. Множество решений проецируется на $\mathbf{C}^2$. Что будет после того, как поднимем полиномы на $\mathbf{C}^2$ до функции на многообразии, заданном выше.

Раздутие соответствует отрезанию угла.

Мы обсудили, как устроено торическое многообразие. Торическое многообразие — это некоторый многогранник, над каждой точкой висит тор, размерность которого соответствует размерности грани, на которой лежит точка.

Новый вопрос: как погрузить в торическое многообразие кривую? Как насчёт специальных погружений? Первое — аналог гладких отображений, второе — аналог голоморфных. Надо понять, как устроены вложенные сферы и вложенные римановы поверхности старших родов.

При вложении будем видеть граф, над каждой внутренней точкой которого висит окружность, а над каждой внешней точкой — точка. В вершинах графа возникает условие согласования: сумма соответствующих гомологических классов должны быть равна нулю.

Как связаны эйлерова характеристика графа и род поверхности? Имеем $\chi = 1 - g$ — арифметический род.

Разрежем всё на цилиндрики, штаны и шляпки и припишем им коэффициенты 0, -1 и 1. Сложив их, получим эйлерову характеристику.

Пусть теперь заданы две поверхности. Как посчитать индекс их пересечения? Сначала надо определить ориентацию. Достаточно задать ориентацию на рёбрах. Каждой точке пересечения графов сопоставим внешнее произведение соответствующих гомологических классов, умноженное на соответствующий индекс пересечения в графе. Это внешнее произведении кратно канонической форме, поэтому его можно рассматривать как число.

Степень поверхности в $\mathbf{C}P^2$ — это индекс её пересечения с примитивным мерседесом. Как связана эта степень с числом точек на границе? Найдём индекс самопересечения исключительного дивизора в раздутии.

Задача. Разобраться в топологии $|z_1|^2 + |z_2^2| - |z_3|^2 = 1$. Это — тотальное пространство некоторого расслоения. У расслоения бывают голоморфные сечения. Индекс самопересечения цикла — это число нулей сечения, из которого вычли число полюсов. (На самом деле это $\mathcal{O}(1)$ для $\mathbf{C}P^1$.) Найти индекс самопересечения $\mathbf{C}P^1$ в этой поверхности. Сделать тоже самое с применением химических терминов. Сделать тоже самое для $\mathbf{C}P^2$. Понять, почему ответы разные.

Задача. Как обобщить топологические вложения кривых в двумерное пространство для случая поверхностей в трёхмерном пространстве? Обобщить правило склейки $a + b + c = 0$. Как кончаются поверхности на гранях? Что происходит для пересечения поверхности и кривой?

У кривой был вектор из $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, а у поверхности — бивектор в $\mathbf{Z}^3$.

Мы изучили торические многообразия и поговорили о топологии того, что проецируется на граф. А теперь мы поговорим про аналог голоморфных отображений.

Начнём с ответа. У нас был граф, рёбра которого раскрашивались целочисленными векторами. Аналогом голоморфного подмногообразия будет граф, рёбра которого, рассматриваемые как отображения отрезка $[0,1]$ в векторное пространство, скорость которого в каждой точке равна целочисленному вектору, соответствующему ребру, умноженному на некоторую константу. Теперь будем изучать трёхмерные комплексные многообразия и двумерные комплексные подмногообразия в них.

Рассмотрим $\mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}P^1$. Это — призма. $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ вкладывается в $\mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}P^1$ как вертикальная книжка с тремя листами. Над каждой страницей висит T^2 вложенное в T^3.

Поверхности клеются друг к другу как книжки. Что происходит на границе? Страница кончается на грани, если $a \wedge b = 0$, где a — бивектор страницы, а b — вектор грани. Книжка является топологическим обобщением торического многообразия.

Почему эйлерова характеристика полиэдрального комплекса — это арифметический род? Арифметический род $g = \sum_k (-1)^k h^{0,k}$, или, что тоже самое, эйлерова характеристика $\mathcal{O}$.

А почему всё-таки для голоморфности требуется пропорциональность скорости вектору на ребре? Здесь и возникает тропическая наука. Рассмотрим графы в $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$. Эти графы связаны с графиками мероморфных функций. Рассмотрим график $w = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$. h Сделаем замену $w = \exp(\omega_T/\hbar)$, и такие же замены для других переменных и параметров. Получаем $\exp(\omega_T/\hbar) = (\exp(z_T/hbar) - \exp(a_{1,T}/\hbar)) \cdots (\exp(z_T/hbar) - \exp(a_{n,T}/\hbar))$. Чтобы нарисовать график логарифма модуля, достаточно нарисовать график логарифма модуля одного из сомножителей. При устремлении $\hbar$ к бесконечности получаем следующее. При $\Re z_T > \Re a_T$ имеем линейную функцию, при $\Re z_T < \Re a_T$ имеем постоянную функцию, при $\Re z_T = \Re a_T$ имеем $-\infty$. График выглядит как прямой угол, из которого по лучу выходит угол.

Первый взгляд на кривые. Сколько есть отображений из $\mathbf{C}P^1$ в $\mathbf{C}P^2$ степени 1, 2 и 3? Надо описать отображения и образы вложения. Такие отображения задаются тремя полиномами от двух переменных степени d. Пространство таких отображений имеет размерность $3(d+1)-1 = 3d+2$. Если рассматривать только образы вложений, получаем $3d + 2 - 3 = 3d - 1$, так как можно действовать специальной комплексной линейной группой порядка 2.

На картинках легко видеть, что кривые степени 1 зависят от 2 параметров, степени 2 от 5 параметров.

А теперь общая формула. В категории проективных многообразий у многообразия есть росток — его тропический предел. Задача, которая представляется задачей общего положения, перестаёт быть такой при переходе к тропическому пределу. И наоборот. Тропический взгляд: ситуации общего положения все одинаковы, а у вырождений есть комбинаторика.

Вопрос: Вычислить размерность пространства голоморфных отображений кривых рода g в общее тропическое многообразие, которое есть набор полиэдров, склеенных друг с другом по полиэдрам меньшей размерности. В $\mathbf{C}P^2$, в $\mathbf{C}P^n$, в многоугольнике, в полиэдре, в полиэдральном комплексе. Сравнить с теоремой об индексе, сделать заключение (о чём?). Размерность пространства отображений $\mathbf{C}P^1$ в $\mathbf{C}P^n$ — это подсчёт размерности пространства полиномов. Размерность пространства отображений $\Sigma \to \mathbf{C}P^n$ — это подсчёт размерности пространства мероморфных функций. (Теорема Абеля-Якоби.)

Хотим узнать размерность пространства тропических кривых рода g степени d. Оно равно количеству ног, к которому добавили $(n-3)(1-g)$. В частности, отсюда получаем теорему Абеля-Якоби. Размерность складывается из количества рёбер остовного дерева графа с обрезанными ногами (оно равно количество ног, к которому добавили $2g-3$), добавления числа n (отвечающего за независимые трансляции во всех направлениях), и вычитания $(n-1)g$ (которое соответствует наложению $n-1$ соотношения на наклон каждого циклического ребра).

Формулу для размерности пространства непараметризованных отображений кривой рода g в n-мерное пространство можно переписать так: это число ног, которые вышли на границу, к которой добавили $n(1-g)+(3g-3)$. Здесь $3g-3$ — размерность пространства комплексных структур, которые соответствуют параметризации. А что значат два других числа?

Вспомним теорему об индексе. Рассмотрим эйлерову характеристику расслоения E на комплексном многообразии Y: $\chi(E)=\sum_k(-1)^k H^k(E,Y)$. Имеются ввиду когомологии Дольбо. Как свести задачу про число параметризованных отображений к задаче о подсчёте эйлеровой характеристики? Касательное пространство к пространству всех отображений является не чем иным, как пространство сечений обратного образа касательного расслоения. Итак, нас интересует число голоморфных сечений обратного образа голоморфного касательного расслоения. Число голоморфных сечений расслоения — это неправильное понятие, это размерность $H^0(E,Y)$. А правильное понятие — эйлерова характеристика, которая не меняется при деформации задачи, она является стабильным. Гротендик говорил, что самое главное — замена функтора на его производные.

Для любого конечномерного линейного оператора его индекс — разность размерностей области определения и области значений совпадает с разницей размерностей ядра и коядра.

Оказывается, что первый класс Чженя обратного образа касательного расслоения является числом ног нашего отображения!

c_1 является элементом $H^2(X)$. Чтобы его узнать, надо взять нули и полюса сечения внешнего расслоения старшей степени. Для случая торического многообразия имеем его границу.

Геометрический смысл числа ног — индекс пересечения класса образа с первым классом Чженя.

Вопрос: подправить формулу для размерности.

Вопрос: получить похожие формулы для голоморфных отображений поверхностей, найти в них арифметический род, получить, что арифметический род равен эйлеровой характеристике, получить формулу размерности пространства модулей поверхности, и так далее.

Какова размерность пространства отображений двумерного симплициального комплекса в n-мерный тор? Вспомним, что эйлерова характеристика равна арифметическому роду поверхности. Арифметический род равен $\sum_k(-1)^k h^{0,k}$, то есть эйлерова характеристика пучка $\mathcal{O}$. Он определён для всех многообразий. Для римановых поверхностей он равен $1-g$, где g — число ручек. Важность тропической геометрии в том, что один важный объект — арифметический род, равен другому важному объекту — эйлеровой характеристике симплициального комплекса. На самом деле все формулы вычисляют стабильную размерность — число неизвестных, из которого вычли число уравнений. Но уравнения бывают линейно зависимыми!

Вопрос: Какие бывают зависимости? А как подправить формулу?

Отображения в торы приятны тем, что у них нет дополнительного члена.

Вообще, в случае тора у нас есть $n\dim T$ переменных и $m(\dim T-1)$ уравнений. Стабильная размерность равна $\dim T(n-m)+m$. Первый член — арифметический род, второй — размерность комплексных структур.

Какова размерность пространства отображений двумерных полиэдральных комплексов без границы в тор?

Откуда вообще взялись полиэдральные комплексы? У торических многообразий были многогранники, мы их стали склеивать.

Считаем: $\sum_k(\dim T-k)(-1)^k n_k=\chi\dim T-\sum_k(-1)^k k n_k$. Заодно получили размерность пространства комплексных структур.

Общая формула для размерности пространства комплексных структур такова: $-(-1)^k\chi(T^{1,0})=-(-1)^k(H^0(T^{1,0})-H^1(T^{1,0})+H^2(T^{1,0}-\cdots)$. Итак $\chi(\mathcal{O})=\sum_k(-1)^k n_k$, $\chi(T^{1,0})=\sum_k(-1)^k k n_k$. Предсказание: для полиэдрального комплекса без границы последняя величина является инвариантом.

Формула Михалкина: $c_k(X) = \sum_s (-1)^s n^s_{\dim X - k}$. Здесь n^s_p — количество граней размерности p осёдлости s. Осёдлость — коразмерность грани минимальной размерности, на которой лежит грань.

Вернёмся к нашим формулам. У них есть обобщения: $\chi(T^{1,0})^{\wedge 2} = \sum_k (-1)^k (k(k-1)/2) n_k$. Это надо доказать до 25 мая. Вообще, все эти характеристики выражаются через классы Чженя по теореме об индексе.

А теперь ещё надо обобщать на отображения в другие многообразия. Например, в проективное пространство.

Для вершин с осёдлостями имеем $\dim X n^0_0 + (\dim X - 1) n^1_0 + (\dim X - 2) n^2_0 + \cdots$ переменных, $(\dim X - 1) n^0_1 + (\dim X - 2) n^1_1 + \cdots$ соотношений, $(\dim X - 2) n^0_2 - (\dim X - 3) n^1_2 + \cdots$ сизигий. В сумме имеем $\chi \dim X$ плюс размерность пространства комплексных структур (включая осёдлости), плюс то, что из теоремы об индексе.

Задача: разобраться в формуле.

Мы дошли до переднего края!

Рассмотрим отображение комплексной проективной прямой в себя. Сколько отображений степени d проходит через $2d+1$ точек? В случае непараметризованного отображения — $2d-2$ точек. Пусть $P(z) = a_0 \frac{z-a_1}{z-a_2} \frac{z-a_3}{z-a_4} \cdots \frac{z-a_{2d-1}}{z-a_{2d}}$. Тогда $1 = \int_A \prod_{1 \le i \le 2d+1} \delta_i(P(z_i, a) - \omega_i)$.

Обычный миррор основан на том, что мы выделяем голоморфные отображения среди гладких. Тропический миррор основан на том, что мы выделяем тропически-голоморфные (кусочно-линейные) отображения среди всех непрерывных.

Рассмотрим параметризованное отображение из комплексной проективной прямой в себя. Возникают два вопроса: как имитировать ломаные и кто такие наблюдаемые.

Ствол — это те отрезки графика, которые являются единственной точкой пересечения картинки и вертикальной прямой. Остальное называется ветками. Здесь мы видим принципиальное различие между параметризованными и непараметризованными отображениями.

Обобщённая комплексная структуру «многообразия» это вот что такое: пусть у нас есть градуированно коммутативная алгебра, два дифференциала Q и G_-, где Q — дифференциальный оператор первого порядка, а G_- — второго. Мы ищем такое Φ, что $(Q = [G_-, \Phi])^2 = 0$, тогда мы получим обобщённую комплексную стуктуру. Пример: пусть есть комплексное многообразие. Можно рассматривать голоморфные функции, но лучше рассматривать гладкие вместе с оператором Дольбо $\bar\partial$. Но чтобы изучать деформации, нужно изучать не алгебру функций, а алгебру поливекторных полей. По поливекторному полю строим многочлен от формальных антикоммутирующих переменных.

Как перейти от торическому к тропическому? Чтобы определить миррор для произвольного многообразия, надо ввести оператора смены гражданства.

Задача: сделать миррор для полиэдрального комплекса на примере $\mathbf{C}P^1$.

Научная задача — эта та, за которую получаешь по шее, а престижная — за которую бегаешь и получаешь премии.

Уравнение Кодаиры-Спенсера $\bar\partial\mu + \{\mu, \mu\} = 0$ решается так. Сначала ищем $\bar\partial\mu_1 = 0$, потом $\bar\partial\mu_2 = \{\mu_1, \mu_1\}$. Чтобы оно решалось, правая часть должна задавать нуль в когомологиях.