ПРАВИЛЬНО РАСКРАШЕННЫЕ ГРАФЫ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ (СЕДЛОВЫЕ) ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ.

записано Князевой М.

Начнем с простой задачи. Нас интересуют графы (вложенные в сферу или плоскость), обладающие следующими свойствами:

- ребра графа – раскрашенные отрезки (в сферическом случае – геодезические отрезки), красные либо синие;
- любая вершина графа трехвалентна;
- ребра графа не пересекаются;
- условие невыпуклости: при каждой вершине графа есть прилегающий угол, больший π);
- локально у каждой вершины раскраска выглядит одним из следующих способов (см. рис. 1):

(Будем называть такие графы *правильно раскрашенными.*)

Задача 1.
Существуют ли правильно раскрашенные графы?

На плоскости таких графов не бывает (это надо доказывать, но доказательство мы опускаем). Несложно построить граф, обладающий свойствами 1-4 (см. например рис. 2б), но такой граф невозможно правильно раскрасить.

Перейдем от плоскости к сфере: рассмотрим проекцию нижней полусферы на плоскость. Это биективное отображение, которое переводит геодезические отрезки на сфере в прямолинейные отрезки на плоскости (см. рис. 3).

Рис. 1. Правильная раскраска

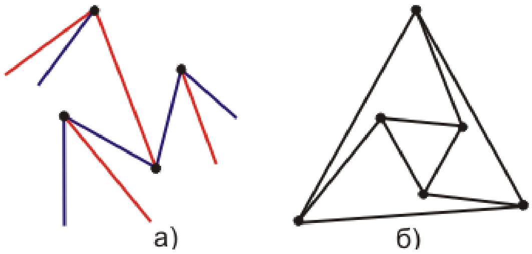

Рис. 2

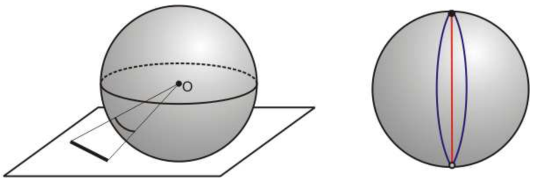

Рис. 3. Графы на сфере

На сфере правильно раскрашенные графы существуют! Простейший из них получается при соединении двух диаметрально противоположных точек сферы тремя полукругами например так, как показано на рисунке 3.

Будем рассматривать графы нетривиальные, у которых длины ребер меньше π.

Рассмотрим некоторый правильно раскрашенный граф на сфере (см. рис. 4). Обозначим через v – количество вершин, e – число ребер, f – число клеток (двумерных областей, образованных графом). Проходя по границе каждой клетки, посчитаем число перемен цвета n. Известно, что n четно и > 0. Тогда общее число перемен цвета по всем клеткам c равно с одной стороны $2v$, т.к. каждая вершина участвует в трех клетках и дает 2 перемены цвета.

Также, по формуле Эйлера имеем: $v - e + f = 2$. Из трехвалентности графа следует, что $e = \frac{3v}{2}$. Поэтому общее число перемен цвета по всем клеткам равно $c = 4f - 8$.

Это значит, что *по крайней мере у четырех клеток число перемен цвета должно быть равно 2.*

Определим, как выглядит такая клетка. Она должна быть ограничена двумя ломаными: одна из них красная, другая – синяя, с направлениями выпукдости внутрь клетки (см. рис. 5).

Очевидно, что на плоскости таких клеток не бывает. На сфере такие клетки существуют; они "длинные", т.е. не помещаются в полусферу.

Легко убедиться, что такая клетка содержат большой полукруг (см. рис. 5).

Т.о., чтобы построить правильно раскрашенный граф на сфере, нужно сначала разместить на поверхности сферы нужное количество больших

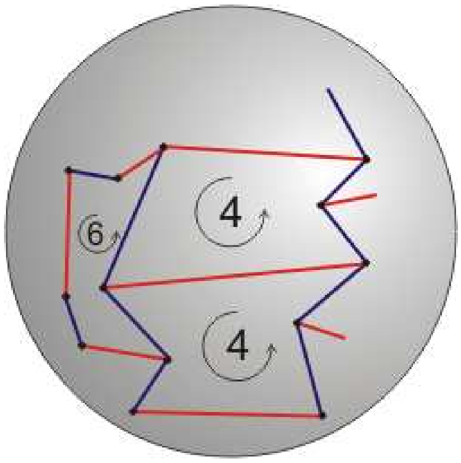

Рис. 4. Граф на сфере

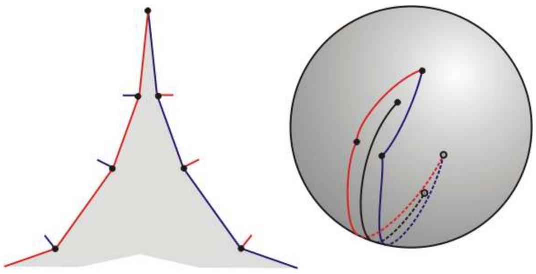

Рис. 5. Клетка с $n = 2$

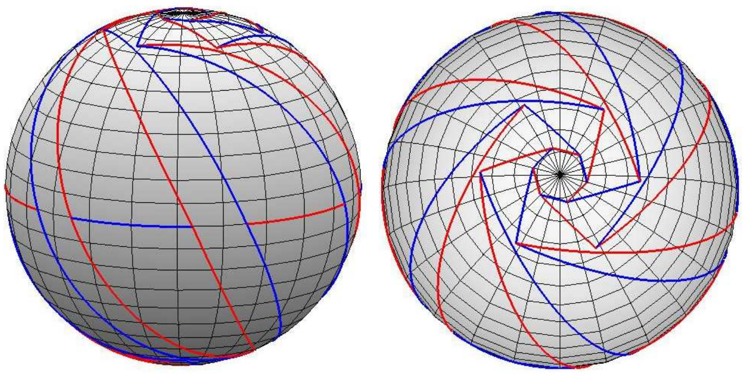

Рис. 6. Правильно раскрашенный граф на сфере

полукругов (по крайней мере четыре), затем "окружить" их клетками с $n = 2$ и завершить построение графа. Например, для 6 больших полукругов правильно раскрашенный граф может выглядеть следующим образом (см. рис. 6).

Чем же обусловлено появление задачи 1?

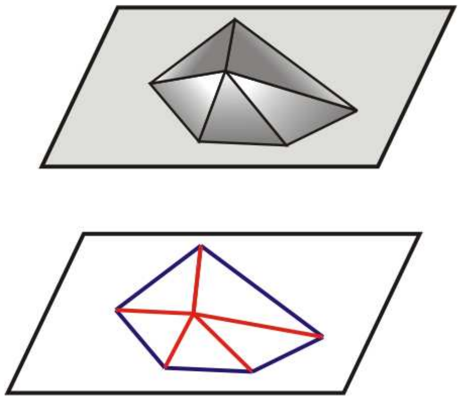

Рис. 7. Кусочно-линейная поверхность и соответствующий граф

Пусть есть кусочно-линейная поверхность, которая вне некоторой области совпадает с плоскостью. Потребуем , чтобы такая поверхность однолистно проецировалась на плоскость. Тогда при проекции на плоскость этой поверхности получаем некоторый граф. Покрасим его в соответствии с выпуклостью-вогнутостью ребер: если ребро поверхности выпукло, то на графе его проекция – красное ребро; если ребро поверхности вогнуто, то на графе его проекция – синее ребро (см. рис. 7).

Верна теорема:

Теорема 11.1. *Граф представим в виде такой проекции тогда и только тогда, когда его можно заменить на систему из растянутых и сжатых пружинок, находящуюся в равновесии.*

При этом красные ребра отвечают растянутым пружинкам, а синие – сжатым.

Важный пример.

Рассмотрим конструкцию из растянутых пружинок на сфере, находящуюся в равновесии (то есть граф из красных ребер). Значит сумма сил, действующих в каждой точке, равна 0.

Для вершины графа A рассмотрим касательную к сфере плоскость. В ней для каждого ребра, выходящего из A, рассмотрим вектор в направлении, перпендикулярном ребру графа. Модуль вектора положим равным силе напряжения пружины. Получим вектора $\overline{1}$, $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$. Так как сумма сил в точке равна нулю, то $\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} + \overline{5} = \overline{0}$, и вектора $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$ образуют выпуклый многоугольник в касательной плоскости.

Аналогично поступим и с другими вершинами графа на сфере.

Заметим, что при этом у многоугольников, соответствующих соседним вершинам графа есть параллельные отрезки одинаковой длины: например, отрезки m и n, ортогональные ребру $\overline{1}$ графа на сфере, параллельны и по построению имеют одинаковую длину.

Поэтому из таких многоугольников при подходящих параллельных переносах можно "собрать" выпуклый многогранник.

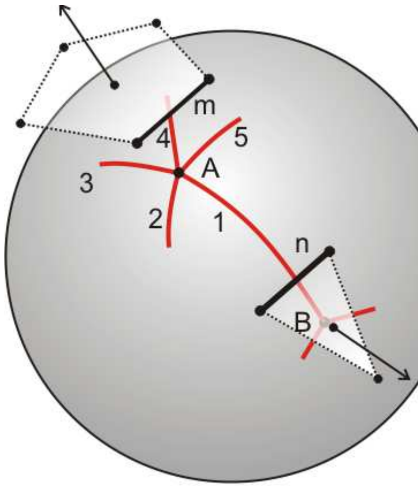

Рис. 8. Построение двойственного многогранника

Такое двойственное соответствие "равновесная конструкция из растянутых пружинок $\leftrightarrow$ выпуклый многогранник" обратима: по выпуклому многограннику можно построить равновесную конструкцию из растянутых пружинок на сфере. Для этого нужно на сфере отметить концы нормальных векторов граней многогранника (это вершины графа), затем нужно соединить их согласно комбинаторике многогранника отрезками больших кругов (это пружинки). Натяжение пружинки определяется по длине соответствующего ребра многогранника.

Эту процедуру (построение многогранника по пружинному сферическому графу) можно применить для любого равновесного пружинного графа на сфере. При этом многоугольники аккуратно склеятся в замкнутую кусочно-линейную поверхность. Например, для графа с рис. 6. все многоугольники – треугольники, и они дают поверхность см. рис. 9. Такой объект – *виртуальный многогранник*.

Откуда взялось условие невыпуклости в постановке задачи:

Лемма 11.2. *Если невыпуклый граф получен как проекция кусочно-линейной поверхности (см. выше), то эта поверхность седловая.*

Откуда взялось условие правильной раскраски:

Лемма 11.3. *Если равновесный пружинный граф трехвалентный и невыпуклый, то он допускает правильную раскраску.*

E-mail address: `marinakn@mail.ru`

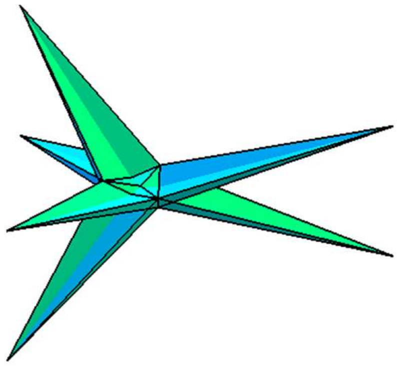

Рис. 9. Виртуальный многогранник