Многообразия + дифформы (обзорно)

Многообразия

Def 1. *Картой* в топологическом пространстве M будем называть пару (U, φ), где U- открытое множество в M, а $\varphi : \Re^n \to U$ - гомеоморфизм.

Таким образом в множестве U вводятся координаты при помощи соответствия $x \in U : x \leftrightarrow \varphi^{-1}(x) \in \Re^n$

Def 2. Карты (U, φ) и (V, ψ) в M будем называть C^r-*согласованными* , если выполнено одно из условий:

1. $U \cap V = \emptyset$
2. $U \cap V \neq \emptyset$, и гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi : \varphi^{-1}(U \bigcap V) \to \psi^{-1}(U \bigcap V)$ является C^r-диффеоморфизмом.

Def 3. Множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ в M называется C^r-*атласом* или *атласом класса* C^r, если любые две карты C^r-согласованны и $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$

Замечание 1. Размерность евклидова пространства из которого действуют φ_α , предполагается одной и той же.

Def 4. Два C^r-атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ называются эквивалентными, если их объединение является C^r-атласом.

Задача 1. Покажите , что введёное таким образом отношение, действительно является отношением эквивалентности.

Def 5. Класс эквивалентности C^r-атласов на M называется C^r-*структурой* на M.

Def 6. Топологическое хаусдорфово пространство M со 2ой аксиомой счётности и с заданной на нём C^r-структурой называется C^r-*многообразием*, а размерность пространства $\Re^n$ из которого действуют гомеоморфизмы карт, называется *размерностью* C^r-многообразия.

Замечание 3. Задать C^r-структуру можно, например, фиксировав один из атласов.

Если гомеоморфизмы ${\varphi_\alpha}^{-1}\varphi_\beta$ являются аналитическими функциями, то говорят об аналитических многообразиях, если просто дифференцируемыми, то о дифференцируемых многообразиях, если они только лишь непрерывные, то о топологических.

В определении карты у нас участвует $\Re^n$ Понятно, что вместо последнего можно взять любое диффеоморфное ему множество. Например открытый единичный шар или куб.

Задача 2.Постройте явно диффеоморфизм переводящий $\Re^n$ в а) $D^n_\varepsilon = \{x \in \Re^n : |x| < \varepsilon\}$ б) $I^n_\varepsilon = \{x \in \Re^n : 0 < x^i < \varepsilon, i = 1..n\}$

В дальнейшем , если нам будет удобно, то мы будем рассматривать такие обобщённые карты.

Следующее замечание касается гладкости C^r-структур. Если мы говорим про топологическое многообразие, то очевидно C^0 структура задаётся на нём однозначно. В общем же случае мы можем завести на одном и том же топологическом пространстве разные гладкие структуры. Например:

Задача 3. Покажите , что аталасы

$$\{(\Re^1, \varphi_0)\}, .., \{(\Re^1, \varphi_k)\}, ..$$

$$\varphi_k(x) = x^{2k+1}, k = 0, 1, ..$$

задают на $\Re^1$ разные C^∞ структуры. Поэтому формально мы безусловно должны фиксировать определённую гладкую структуру. В дальнейшем мы будем делать это предъявляя конкретный атлас.

Теперь рассмотрим ряд примеров.

1.$\Re^n$ атлас состоит из одной карты $\{(\Re^n, \phi)\}$, где $\phi(x) = x$ - тождественно отображение.

2. Сфера S^n. $S^n := \{x \in R^{n+1} : \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ Атлас задаётся с помощью стереографической проекции и состоит из двух карт: (U_1, ϕ_1^{-1}), (U_2, ϕ_2^{-1}), где

$$\phi_1(x) = (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$

$$\phi_1(x) = (\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}})$$

$U_1 = S^n/N$, $U_2 = S^n/S$, где N и S - северный и южный полюсы соответственно.

3. График отображения. Пусть задано отображение $f : R^n \to R^m, f \in C^r$. Рассмотрим график отображения $\Gamma(f) = \{x, f(x)\} \subset R^n \times R^m$ Атлас на $\Gamma(f)$ зададим одной картой (R^n, ϕ), где $\phi(x) = (x, f(x))$

4. Множество решений системы уравнений. Пусть имеется система уравнений

$$f_1(x_1, ..., x_n) = 0,$$

$$...$$

$$f_m(x_1, ..., x_n) = 0,$$

где $f_1, ..., f_m : \Re^n \to \Re^1$ - функции класса $C^r, r \geq 1$. Пусть $n > m$.Система функций $f_1, ..., f_m$ задаёт C^r отображение $f : \Re^n \to \Re^m$. Множество решений системы обозначим M, очевидно $M = f^{-1}(0)$

Теорема Пусть множество M непусто. Если для всякой точки $x \in M$ ранг матрицы Якоби $(\frac{\partial f}{\partial x})|_x$ равен m, то M является $n - m$ мерным многообразием.

Доказательство: непосредственно следует из теоремы о неявной функции.

Поскольку локально M можно задать как график, то и атлас на нём определяется естественным образом.

Последние несколько примеров многообразий представляли собой поверхности в $\Re^n$. Это не случайно. Дело в том, что многообразия в смысле даного выше определения могут быть реализовоны как поверхности в евклидовом пространстве достаточно высокой размерности. Точная формулировка последнего утверждения будет дана ниже.

5.Другой класс примеров многообразий доставляет конструкция произве дения многообразий. Итак, пусть M^m и N^n - два C^r многообразия, тогда на топологическом произведении $M \times N$ можно естественным путём ввести структуру C^r-многообразия размерности $m+n$. Например n-мерный тор T^n есть произведение n окружностей: $T^n = S^1 \times ... \times S^1$

Задача 4. Опишите как устроена гладкая структура на прямом произведении.

6. Проективные пространства $\Re P^n$ и CP^n. Рассмотрим совокупность всех ненулевых векторов пространства $\Re^{n+1}$,и будем считать, что векторы y и λy, где $\lambda \in \Re, \lambda \neq 0$ эквивалентны. Соответствующие классы эквивалентности называются точками проективного вещественного пространства $\Re P^n$. Альтернативное определение: рассмотрим сферу $S^n := \{y \in R^{n+1} : \sum\limits_{i=0}^{n} y_i^2 = 1\}$ будем считать две точки эквивалентными, если они диаметрально противоположны. Фактор пространство по этому отношению вновь приводит к $\Re P^n$.

Задача 5. Опишите, как устроена фактор топология в обоих случаях и убедитесь в гомеоморфности обоих конструкций.

Введём явно структуру многообразия. Рассмотрим $\Re P^n$, как множество прямых L в $\Re^{n+1}$. Каждая прямая пересекает одну или несколько гиперплоскостей вида $x_j = 1$. Зафиксируем одну из таких плоскостей $x_i = 1$ и выделим из L совокупность U_i всех прямых, пересекающихся с гиперплоскостью $x_i = 1$. Тогда положение прямой из U_i определяется декартовыми координатами $(z_1, ..., z_{i-1}, 1, z_i, z_n)$ её точки пересечения с гиперплоскостью $x_i = 1$. Координаты $(z_1, ..., z_{i-1}, z_i, z_n)$, естественно принять за координаты прямой. Координаты z называются проективными координатами. Имеем гомеоморфизм $\psi_i(l) = (z_1, ..., z_{i-1}, z_i, z_n) : U_i \to \Re^n$

Задача 6. Убедиться, что $n+1$ введёные карты образуют бесконечно-гладкий атлас.

Задача 7. Доказать $\Re P^1 = S^1$.

Комплексное проективное пространство CP^n определяется аналогично : Есть C^{n+1}, отождествим два вектора, если один получается из другого умножением на $\lambda \in C$, получим множество комплексных прямых.

7. Матричные группы. $GL(n,\Re)$ - группа обратимых матриц,
$SL(n,\Re)$ - обратимые, с опред равным 1,
$O(n,\Re), U(n), SU(n)$ - все они могут быть реализованы как поверхности в $\Re^{n^2}$ и $\Re^{2n^2}$

Def 7. Расширим определение многообразия до определения многообразия с краем, позволив гомеоморфизмам карт действовать не только из $\Re^n$, но и из $H^n = \{x \in \Re^n : x^1 \geq 0\}$.

Наозвём точками края , точки соответствующие ∂H^n, последнее корректно в силу теоремы Брауэра, говорящей, что гомеоморфизм между областями $\Re^n$ переводит внутренние точки во внутренние.

Множество точек края, само образет многообразие.

Def 8. Будем говорить , что многообразие ориентируемо, если существует такой атлас, что все функции перехода между картами имеют положительный якобиан.

Def 9. Если $A(M) = \{(H^n, \phi_i, U_i)\} \cup \{\Re^n, \phi_j, U_j\}$- ориентирующий многообразие M атлас, то $A(\partial M) = \{\Re^{n-1}, \phi_i|_{\partial H^n = \Re^{n-1}, \partial U_i}\}$ есть ориентирующий атлас края ∂M многообразия M. Задаваемая этим атласом ориентация края называется ориентацией края, согласованной с ориентацией многообразия.

Отображение многообразий.Тензоры

Def 10. Отображение гладких многообразий $f : M \to N$ имеет класс гладкости C^k, если по отношению к гладким локальным координатам $\{x^i\}$ на M и $\{y^j\}$ на N оно задаётся вектор-функцией $(y^1, ..., y^n) = f(x^1, ..., x^m)$ класса гладкости C^k

Def 11. Многообразия M и N называются диффеоморфными, если $\exists$ такие гладкие биективные $f : M \to N$ и $g : N \to M$, что они взаимообратны.

Def 12. Многообразие M^k называется вложением в N^l, $k < l$ с помощью гладкого отображения f, если ранг якобиана отображения f при любом $x \in M^k$ равен k и отображение f взаимно однозначно отображает M^k на $f(M^k)$

Th Уитни.Каждое гладкое многообразие M^n может быть вложено в пространство $\Re^{2n+1}$

Def 13. Касательным к M в точке x вектором v называется класс эквивалентных кривых, выходящих из x.Причём кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, такие что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ считаются эквивалентными,если в какой-то карте (U, ϕ^{-1}),$x \in U$ выполнено равенство $\frac{d\phi(\gamma_1(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d\phi(\gamma_2(t))}{dt}|_{t=0}$

Легко убедиться, что определение корректно , то есть кривые эквивалентные в какой-то локальной системе координат , эквивалентны и в других.

Задача 7.Убедитесь.

Таким образом с каждой системой локальных координат и каждым вектором v связывается набор (причём единственный) из $n = dim$ чисел $\xi^j = \frac{d\phi^j(\gamma(t))}{dt}|_{t=0}, \quad j = 1..n$ преобразующихся при замене координат $y(x)$ по закону:

$$\xi_y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\xi_x^j$$

Легко видеть, что это соответствие (если зафиксировать локальные координаты) биективно. Множество всех наборов из n чисел образуют линейное пространство изоморфное $\Re^n$. Поскольку преобразования координат линейные, то они сохраняют эту линейную структуру.

Легко определить на касательных векторах (то есть на классах эквивалентности кривых), сумму и умножение на вещественное число, так, что множество касательных векторов станет линейным пространством, а соответствие $v \leftrightarrow \xi$ - изоморфизмом.

Задача 8.Определите.

Таким образом множество касательных векторов в точке x, многообразия M образует линейное пространство TM_x Объединение касательных пространств в различных точках называется касательным расслоением $TM = \bigcup\limits_x TM_x$.Н касательном расслоении естественным образом вводится структура многообразия.

Ковектором w связанным с точкой x называется линейная функция $w : TM_x \rightarrow \Re$. Легко проверить, что множество ковекторов в точке x образуют линейное пространство размерности $dim(TM_x) = n$, обозначаемое TM_x^* и называемое сопряжённым. В качестве базиса TM_x^* можно выбрать сопряжённый к базису TM_x $\{e^j\}$, который определяется условием: $e_i(e^j) = \delta_i^j$.Тогда каждый ковектор w будет разлагаться по этому базису и определяться своими координатами $\{\zeta_j\}, j = 1..n$. При заменах координат $y(x)$ имеем закон преобразования для ковектора:

$$\zeta_i|_y = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\zeta_j|_x$$

Далее можно рассматривать тензорные произведенеия вида

$$F = TM_x \otimes ... \otimes TM_x \otimes TM_x^* \otimes ... \otimes TM_x^*$$

С базисом

$$e_{i_1} \otimes ...e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_l}$$

Тогда его векторы будут называться тензорамми типа (k, l).Следует сделать одно уточнение: когда мы говорили о векторном законе преобразования, то мы подразумевали все возможные замены координат, в принципе же можно говорить о векторном законе преобразования относительно какой-то группы преобразований, которая будет подрупвой группы всех преобразований.Возвращаясь к определению тензора, отметим, что здесь рассматривается группа преобразований пространства F, индуцированная преобразованиями в TM_x, которые в свою очередь получаются при заменах локальных координат $y(x)$.Общий закон преобразования тензора

$$T = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} e_{i_1} \otimes ... e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_l}$$

при заменах $y(x)$:

$$T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}|_y = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\tilde{i_1}}} ... \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{\tilde{i_k}}} \frac{\partial x^{\tilde{j_1}}}{\partial y^{j_1}} ... \frac{\partial x^{\tilde{i_l}}}{\partial y^{i_l}} T^{\tilde{i_1} \dots \tilde{i_k}}_{\tilde{j_1} \dots \tilde{j_l}}|_x$$

Def 14. Тензорным полем называется семейство гладко зависящих от точки многообразия тензоров. $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}(x)$

Кососимметрические тензоры типа $(0, k)$

Def 15. Тензор типа $(0, k)$ называется кососимметрическим, если
$T_{\sigma(i_1,...,i_k)} = sgn(\sigma) T_{i_1,...,i_k}, \ \forall \sigma \in S_k$, где S_k- группа перестановок из k элементов.

Действие перестоновки задаётся следующим образом: $\sigma(i_1, ..., i_k) = (i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(k)})$

Задача 9 если $k > n$, то кососимметрический тензор - нулевой.

Для кососимметрических тензоров введём базис: $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < ... < i_k$, определяемый выражением:

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \otimes ... \otimes e^{i_{\sigma(k)}}$$

$$T_{i_1,...,i_k} e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_k} = \sum_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Очевидно, что $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$- кососимметрично относительно перестановок индексов.

Пример Рассмотрим кососимметричный тензор ранга $(0, n)$ в n мерном пр-ве. Он определяется одним числом $T_{1...n}$:

$$T_{1..n} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_n}; \quad T_{i_1,...,i_n} = T_{1,...,n} \epsilon_{i_1,...,i_n}$$

Th Кососимметрический тензор ранга $n = dim$ при замене координат $y(x)$ преобразуется по закону: $T_{1,...,n}|_x = T_{1,...,n}|_y J$, где $J = det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})$
Доказательство:

$$\epsilon_{1,...,n} = \epsilon_{i_1,...,i_n} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^1} ... \frac{\partial y^{i_n}}{\partial x^n} = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \frac{\partial y^{\sigma(1)}}{\partial x^1} ... \frac{\partial y^{\sigma(n)}}{\partial x^n} = J$$

Пример $g_{ij} - (0, 2)$ - невырожденная квадратичная форма. $g = det(g_{ij})$. При заменах $y(x)$

$$g_{i_1,j_1}|_y = \frac{\partial x^{i_2}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial y^{j_1}} g_{i_2,j_2}|_x$$

В матричной записи $G' = A^T GA, \quad A = (\frac{\partial x}{\partial y}),\ G = (g_{ij})|_x,\ G' = (g_{ij})|_y$

$$g' = detG' = det(A^T GA) = (detA)^2 detG \Rightarrow \sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}|detA|$$

То есть доказали: Выражение $\sqrt{|g|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$- тензор относительно таких замен, что $A = (\frac{\partial x}{\partial y}) > 0$. Форма $\sqrt{|g|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ - элемент объёма, задаваемый метрикой g_{ij}

Def 16. Определим внешенее произведение форм $\omega_1 \wedge \omega_2$, задав его на мономах и доопределив на произвольных формах по линейности:

$$(dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}) \wedge (dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_q}) = dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_q}$$

Задача 9 Д-ть $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{pq}\omega_1 \wedge \omega_2$, где ω_1 и ω_2 - p и q формы соответственно.

Тензоры в римановом и псевдоримановом пространствах

Пусть имеется невырожденная форма g_{ij} ранга $(0, 2)$, тогда она задаёт скалярное произведение на векторах по формуле $\langle \xi, \eta \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij}$.Обратная матрица $g^{ij} = (g_{ij})^{-1} : g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$ определяет тензор ранга $(2, 0)$, который задаёт скалярное произведение на ковекторах : $\langle \xi, \eta \rangle = \xi_i \eta_j g^{ij}$ В присутствии метрического тензора можно определить поднятие и опускание индексов по формулам:

$$T^{i_2 ... i_p}_{i_1 j_1 ... j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 ... i_p}_{j_1 ... j_q}$$

$$T^{j_1 i_1 ... i_p}_{j_2 ... j_q} = g^{j_1 k} T^{i_1 ... i_p}_{k j_1 ... j_q}$$

Def 17. Оператор ***** задаёт отождествление кососимметрических тензоров типа $(0, k)$ $(0, n - k)$ Пусть T кососимметрический тензор $(0, k)$, тогда

$$(*T)_{i_{k+1} ... i_n} = \frac{1}{k!} \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1 ... i_n} T^{i_1 ... i_k},$$

$$T^{i_1 ... i_k} = g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} T_{j_1 ... j_k}$$

Задача 10

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)} sgn(g) T$$

Дифференцирование дифференциальных форм.

Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} T_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

$$d\omega = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1 < ... < i_k}} (\frac{\partial T_{i_1 ... i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0}) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Примеры: $d(f(x^1,x^2)) = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2$,

$d(adx^1 + bdx^2) = (\frac{\partial a}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial a}{\partial x^2}dx^2) \wedge dx^1 + (\frac{\partial b}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial b}{\partial x^2}dx^2) \wedge dx^2 = \frac{\partial a}{\partial x^2}dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial b}{\partial x^1}dx^1 \wedge dx^2 = (\frac{\partial b}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^2})dx^1 \wedge dx^2$

Задача 11 Показать, что $d^2 = 0$

Задача 12 Показать, что $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$, где ω_1 - p-форма, ω_2 - q-форма

Def 18. Дивиргенция $\delta = *^{-1}d*$

Задача 13 Узнать уравнения Максвелла:

$$dF = 0, \qquad \delta F = -j$$

где $F = \sum\limits_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def 19. Пусть дано отображение F области m-мерного пространства с координатами $\bar{x}$ в область n-мерного пространства с координатами $\bar{y} : \bar{y}(\bar{x})$. Тогда каждому тензору типа $(0,k)$ в пространстве $(y^1, ..., y^n)$ соответствует тензор $(F^*T)_{i_1,...,i_k}(x^1, ..., x^m) = [T_{j_1,...,j_k} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial y^k}{\partial x^{i_k}}](\bar{y}(\bar{x}))$

Пример. Пусть в n-мерном пр-ве задана метрика g_{ij} и m-мерная поверхность $y^i = y^i(x^1, ..., x^m), i = 1, ..., n$ Тогда пользуясь операцией ограничения, мы получаем метрику $\tilde{g}_{kl}(\bar{x}) = g_{ij}(\bar{y}) \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l}$ Это метрика метрика поверхности, индуцированная метрикой объемлющего пространства.

Th. Форма $\sum\limits_{i_1<...<i_k} T_{i_1,...,i_k} dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_k}$, ограниченная на k-мерную поверхность $y^i = y^i(x^1, ..., x^k), i = 1, ..., n$, имеет вид

$$\sum_{i_1<...<i_k} J^{i_1...i_k} T_{i_1,...,i_k} dx^1 \wedge ... \wedge dx^k$$

Здесь $J^{i_1...i_k}$ - минор kого порядка матрицы $(\frac{\partial y}{\partial x})$ составленный из столбцов с номерами $i_1, ..., i_k$

Доказательство: Используя определение и косую симметричность T:

$$(F^*T)_{1...k} = T_{i_1...i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^1} ... \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^k} = \sum_{i_1<...<i_k} T_{i_1,...,i_k} (\sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \frac{\partial y^{i_{\sigma(1)}}}{\partial x^1} ... \frac{\partial y^{i_{\sigma(k)}}}{\partial x^k}) =$$

$$= \sum_{i_1<...<i_k} T_{i_1,...,i_k} J^{i_1...i_k}$$

Пример. Рассмотрим $n+1$-мерное пространство Минковского $\Re_{1,n}$. Рассмотрим движение свободной релятивистской частицы $x^{\nu}(\tau)$. Как известно действие в этом случае записывается в виде:

$$-m\int ds=-m\int\sqrt{\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dx^n}{d\tau}\right)^2-...-\left(\frac{dx^n}{d\tau}\right)^2}d\tau$$

Заметим, что это действие представляет собой интеграл объёма связанного с индуцированной на пути метрикой, в смысле даного выше определения. То есть путь частицы - 1омерное вложенное многообразие, а метрика на нём получается из метрики Минковского $\eta=diag\{1,-1,...,-1\}$ во внешнем пространстве, метрический тензор имеет одну компоненту:

$$\tilde{g}_{\tau\tau}=\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

а элемент объёма : $\sqrt{|\tilde{g}|d\tau}=\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}}d\tau=\sqrt{\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dx^n}{d\tau}\right)^2-...-\left(\frac{dx^n}{d\tau}\right)^2}d\tau$
Теперь предположим, что у нас летит не частица, а струна, которая параметрезуется по своей длине параметром σ, тогда её траектория - есть вложение двумерной поверхности в $\Re_{1,n}$. Естественно определить действие для неё по аналогии с частицей, а именно как объём этой поверхности сосчитанный исходя из сужения метического тензора. Итак, пусть есть вложение $x^{\mu}(\tau,\sigma)$, тогда индуцированный метрический тензор записывается по определению

$$h_{ab}=\eta_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{da}\frac{dx^{\nu}}{db},\quad a,b\in\{\sigma,\tau\}$$

Вводя обозначения $\dot{x}^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\tau},x'^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\sigma}$ запишем индуцированный метрический тензор

$$h_{ab}(\tau,\sigma)=\begin{pmatrix}\dot{x}^2 & \dot{x}x'\\ \dot{x}x' & x'^2\end{pmatrix}$$

Откуда:

$$det(h)=\dot{x}^2x'^2-(\dot{x}x')^2$$

И действие записывается, как

$$S=-T\int d\tau\sigma\sqrt{(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2}$$

Это действие для свободной релятивистской бозонной струны, называется действием Намбу-Гото.

Вернёмся к дифференциальным формам и сформулируем важную теорему Стокса.

Def 20. Пусть M-n-мерное гладкое ориентированное многообразие, на котором координаты $x^1,...,x^n$ и ориентация задаются одной картой ϕ_x :

$D_x \to M$ с областью параметров $D_x \subset \Re^n$. Пусть ω-n-форма на M и $\omega = a(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$. Тогда

$$\int\limits_M \omega := \int\limits_{D_x} a(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

где слева стоит определённый интеграл от формы ω по ориентированному многообразию M, а справа - интеграл от функции $a(x)$ по области D_x.

Пусть имеется другая карта, составляющая атлас и соответствующая ей замена координат $x = \phi(t)$. Тогда ей соответствует форма

$$\phi * (a(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n) = a(x(t))det(\frac{\partial x}{\partial t})dt^1 \wedge ... \wedge dt^n$$

и мы видим, что даное выше определение корректно.

Def 21.Носителем $supp\omega$ определённой на многообразии M формы ω называется замыкание множества тех точек $x \in M$, где $\omega(x) \neq 0$

Def 22. Заданная на многообразии M форма ω называется финитной формой, если $supp\omega$- компакт в M.

Def 23. Пусть M-многообразие класса гладкости C^k, а X- подмножество M. Говорят, что система $E = \{e_\alpha, \alpha \in A\}$ функций $e_\alpha \in C^k(M, \Re)$ является k-гладким разбиением единицы на множестве X, если

1. $0 \leq e_\alpha(x) \leq 1$ для любой функции e_α и любого x;

2. каждая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью $U(x)$ в M, что только конечное число функций из E отлично от тождественного нуля на $U(x)$;

3. $\sum\limits_{e_\alpha \in E} e_\alpha(x) \equiv 1$ на X.

Def 24. Пусть $\Sigma = \{U_\beta, \beta \in B\}$ - открытое покрытие множества $X \subset M$. Говорят, что разбиение единицы $E = \{e_\alpha, \alpha \in A\}$ на X подчинено покрытию Σ, если носитель любой функции e_α содержится по крайней мере в одном из множеств системы Σ.

Th. Пусть $\{(U_i, \phi_i), i = 1, ..., m\}$ - конечный набор карт некоторого k-гладкого атласа многообразия M, районы U_i действия которых образуют покрытие компакта $K \subset M$.Тогда на K существует разбиение единицы, подчинённого покрытию $\{U_i\}$

Def 25. Пусть ω - финитная форма степени n на n-мерном гладком многообразии M, ориентированном атласом A. Пусть $\phi_i : D_i \to U_i$ $\{(U_i, \phi_i), i = 1, ..., m\}$ - конечный набор карт атласа A, районы U_i действия которых покрывают $supp\omega$, а $e_1, ..., e_k$ - подчинённое этому покрытию разбиение единицы на $supp\omega$. Повторяя некоторые карты по нескольку раз, можно считать, что $m = k$, и что $suppe_i \subset U_i, i = 1, ..., m$

Интегралом от финитной формы ω по ориентированному многообразию M называется величина

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{D_i} \phi_i^*(e_i\omega)$$

где $\phi_i^*(e_i\omega)$ - координатное представление формы $e_i\omega|_{U_i}$ в области D_i изменения координат соответствующей локальной карты.

Можно проверить, что определение коректно определено и не зависит от выбранного атласа.

Th. Формула Стокса.

Пусть M - ориентированное гладкое n-мерное многообразие и ω - гладкая финитная дифференциальная форма степени $n-1$ на нём. Тогда

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

где ориентация края ∂M многобразя M берётся согласованной с ориентацией многобразия M. Если же $\partial M = \emptyset$, то $\int_M d\omega = 0$

Задача 14. Получить как частные случаи, известные из матанализ формулы Ньютона-Лейбница,Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса .

Все пропущенные моменты можно восстановить по книгам: Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко "Современная геометрия. Методы и приложения"т1,т2; В.А.Зорич "Математический анализ"т.2