Оглавление

Глава 1

Алгебры

1.1 Определение и примеры

Определение 1. *Алгеброй* над полем $\mathbb{K}$ (при желании его везде в дальнейшем можно считать изоморфным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется векторное пространство A над $\mathbb{K}$, снабженное операцией $A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab$, такой, что

$$(a + b)c = ac + bc, \tag{1.1}$$

$$a(b + c) = ab + ac, \tag{1.2}$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \tag{1.3}$$

для любых $a, b, c \in A, \lambda \in \mathbb{K}$.

Замечание (Модули). Иногда используют более общее определение, заменяя поле кольцом, а векторное пространство — модулем. Модуль — это, говоря неформально, «векторное пространство над кольцом». Строгое определение звучит так:

Определение 2. Пусть R — кольцо. *Левым R-модулем* называется коммутативная группа M и операция «умножения на скаляр» $R \times M \to M$, удовлетворяющая свойствам:

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \tag{1.4}$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \tag{1.5}$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \tag{1.6}$$

для любых $a, b \in M$ и $\lambda, \mu \in R$.

Правый R-модуль определяется аналогично (скаляры пишутся справа). Если в кольце есть единица 1_R, то естественно требовать также $1_R a = a$. Если $\mathbb{K}$ — поле, то $\mathbb{K}$-модуль (неважно, левый или правый) есть векторное пространство. Модули могут быть устроены более причудливо, чем векторные пространства, но многие факты для них сохраняются.

Заметим, что алгебра — это векторное пространство и кольцо одновременно (относительно одного и того же сложения), причем эти структуры согласованы в смысле аксиомы 1.3, поэтому на нее естественно переносится соответствующая терминология. Для алгебр мы будем, в частности, пользоваться понятиями базиса, размерности, ассоциативности, коммутативности etc. Напомним, что кольцо называется *ассоциативным*, если $(ab)c = a(bc)$ для любых a, b, c, и и *коммутативным*, если $ab = ba$ для любых a, b.

Приведем несколько примеров алгебр.

Пример 1 (Поле). Само поле $\mathbb{K}$ реализует одномерную алгебру над $\mathbb{K}$.

Пример 2 (Алгебра полиномов). *Полиномом* называют конечную сумму вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{где } a_i \in \mathbb{K}.$$

Их можно складывать, умножать на число и между собой (умножение определяется соотношением $z^n z^m = z^{n+m}$, распространяемым на произвольные полиномы по дистрибутивности) — они образуют алгебру над $\mathbb{K}$, обозначаемую $\mathbb{K}[x]$. Она, очевидно, ассоциативна, коммутативна и бесконечномерна (так как элементы z^k и $z^{k'}$ линейно независимы для $k \neq k'$). Можно рассматривать алгебры полиномов от нескольких переменных, они обозначаются $\mathbb{K}[x, y, z]$.

Пример 3 (Полиномы Лорана). *Полиномы Лорана* — это выражения вида

$$a_{-m}z^{-m} + \ldots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z^1 + \ldots + a_n z^n = \sum_{i=-m}^{n} a_i z^i. \tag{1.7}$$

Умножение снова задается соотношением $z^n z^m = z^{n+m}$, однако на этот раз степени могут быть любыми целыми числами. Заметим, что полиномы Лорана можно понимать как полиномы от z и z^{-1}, поэтому их обозначают как $\mathbb{K}[z, z^{-1}]$.

Пример 4 (Матричные алгебры). Матрицы $n \times n$, или, что то же, координатные записи линейных отображений в себя (эндоморфизмов) n-мерного векторного пространства образуют n^2-мерную алгебру $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Для $n > 1$ она некоммутативна.

Пример 5 (Групповая алгебра). Пусть G — произвольная группа. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{K}[G]$ формальных конечных сумм

$$\sum_{g \in G} a_g g, \text{где } a_g \in \mathbb{K}. \tag{1.8}$$

Другими словами, элементы группы образуют базис $\mathbb{K}[G]$. На базисных элементах определено групповое умножение, распространим его на произвольные вектора $\mathbb{K}[G]$ по билинейности умножения. Полученная алгебра (проверьте, что это алгебра!) называется *групповой алгеброй*, она ассоциативна (так как наследует умножение из группы). $\mathbb{K}[G]$ коммутативна одновременно с G. Размерность $\mathbb{K}[G]$ равна порядку группы G.

Дословно повторяя сказанное, можно построить *полугрупповую алгебру* по полугруппе или моноиду (напомним, что *полугруппой* называется множество, снабженное ассоциативной бинарной операцией, а *моноидом* — полугруппа с нейтральным элементом).

Задача 1. В $\mathbb{K}[G]$ перемножаются два вектора:

$$\sum_{g\in G} a_g g \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} c_g g. \tag{1.9}$$

Найдите выражение для коэффициентов c_g (в терминах a_g, b_g).

Задача 2. Напомним: $\mathbb{Z}$ — аддитивная (то есть, относительно сложения) группа целых чисел, $\mathbb{N}_0$ — аддитивный моноид неотрицательных целых чисел. Что такое $\mathbb{K}[\mathbb{Z}]$? $\mathbb{K}[\mathbb{N}_0]$? $\mathbb{K}[\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}]$? $\mathbb{K}[\mathbb{N}_0\times\ldots\times\mathbb{N}_0]$?

Свободные объекты. Сделаем небольшое отступление. Часто употребляют слово «свободный» применительно к какому-то алгебраическому объекту (например, группе или кольцу). Это означает отсутствие *соотношений* (кроме тех, разумеется, выполнение которых необходимо для того, чтобы, например, свободная группа, оставалась группой), в каком-то смысле это наиболее общие реализации идей группы, кольца итд. Поясним сказанное на нескольких примерах.

Зафиксируем множество S, которое будем называть *алфавитом*, а его элементы — *образующими. Свободной полугруппой* для алфавита S будем называть всевозможные *строки*, составленные из членов S, то есть конечные последовательности вида $a_1a_2\ldots a_n$, где $a_i\in S$. Полугрупповой операцией является *конкатенация*: пусть s,t — две строки, тогда st есть строка, получаемая приписыванием строки t в конец строки s. Например, пусть у нас есть алфавит, содержащий буквы a,b,c: конкатенируя $abbc$ и $acbc$ получим строку $abbcacbc$. Легко видеть, что множество строк с такой операцией образуют полугруппу. Если мы позволяем строке быть пустой, то она будет нейтральным элементом, что дает *свободный моноид.*

Теперь рассмотрим алфавит $S\cup\bar{S}$, где $\bar{S}$ состоит из «обратных» образующих : $\bar{S}=\{s^{-1}:s\in S\}$. Две строки с символами из этого алфавита будем считать эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую конечным числом операций изъятия и добавления пар элементов ss^{-1} или $s^{-1}s$, где $s\in S$. Так, эквивалентны строки abc и $aa^{-1}abcbb^{-1}c$. Множество строк с таким отношением эквивалентности образует *свободную группу* с образующими S. Оказывается, всякая группа G есть факторгруппа свободной для какого-то S. Если алфавит можно выбрать конечным, то G называется *конечно порожденной.* Заметим также, что свободная группа с одной образующей изоморфна $\mathbb{Z}$.

Пример 6 (Свободная алгебра). *Свободная алгебра*[1] с образующими S — это полугрупповая алгебра свободной полугруппы с теми же образующими, то есть линейная оболочка множества строк символов алфавита S. Опять-таки, в силу ее большой общности, можно получать важные алгебры, факторизуя свободную. Позже мы дадим для нее другое описание. Также свободную алгебру называют *алгеброй некоммутирующих многочленов*.

Все перечисленные алгебры ассоциативны, позже мы встретим интересные алгебры, лишенные такого свойства (например, алгебру векторных полей).

Задача 3. Вспомните, какие еще алгебры вам встречались.

1.2 Алгебра Грассмана

Перейдем к первому описанию центрального для нас объекта — алгебры Грассмана. Она будет введена повторно в секции 1.5 с других точек зрения.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\dim V = n$, построим по нему серию пространств $\Lambda^p V$. По определению положим $\Lambda^0 = \mathbb{K}$ и $\Lambda^1 = V$. Далее, рассмотрим пространство линейных комбинаций формальных (пока) элементов вида $a \wedge b$, где a и b — вектора из V:

$$\langle \{a \wedge b\}_{a,b \in V} \rangle_{\mathbb{K}} = \left\{ \sum \lambda_i a_i \wedge b_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i, b_i \in V \right\}, \tag{1.10}$$

где сумма в скобках конечна. Теперь потребуем выполнения трех соотношений:

$$(a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c, \tag{1.11}$$

$$a \wedge b = -b \wedge a, \tag{1.12}$$

$$\lambda(a \wedge b) = a' \wedge b, \text{ где } a' = \lambda a, \tag{1.13}$$

Для этого нужно профакторизовать $\langle \{a \wedge b\}_{a,b \in V} \rangle_{\mathbb{K}}$ по подпространствам, натянутым на вектора вида $(a+b)\wedge c - a\wedge c + b\wedge c$, $a\wedge b + b\wedge a$ и $\lambda(a\wedge b) - (\lambda a)\wedge b$. Заметим, что линейность по второму аргументу вытекает из кососимметричности и линейности по первому. Полученное пространство обозначим $\Lambda^2 V$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис V. Легко видеть (увидьте!), что базисом в $\Lambda^2 V$ будет $\{e_i \wedge e_j\}_{1 \le i < j \le n}$ (индексы можно упорядочить из-за соотношения 1.12). Какова размерность $\Lambda^2 V$? Она совпадает с числом упорядоченных пар неравных целых чисел от 1 до $\dim V = n$, что дает $\dim \Lambda^2 V = \frac{n^2 - n}{2}$.

Аналогично строятся пространства $\Lambda^p V$: они состоят из линейных комбинаций вида $\sum \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_p} a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge \ldots \wedge a_{i_p}$, где $a_{i_k} \in V$, причем выполнены свойства:

$$(a_1 + a_1') \wedge \cdots \wedge a_p = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) + (a_1' \wedge \cdots \wedge a_p), \tag{1.14}$$

[1]Строго говоря, было бы вернее использовать термин *свободная ассоциативная алгебра*, но для нас это излишне

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_p = -(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k+1} \wedge a_k \wedge \cdots \wedge a_p), \tag{1.15}$$

$$\lambda(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p) = (\lambda a_1) \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p. \tag{1.16}$$

Опять-таки, свойство 1.15 (говорящее, что, меняя местами любые два соседних вектора, мы изменяем знак на противоположный) позволяет нам строго упорядочить индексы в выражениях для базисных элементов: $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n}$, и тогда легко вычислить:

$$\dim \Lambda^p V = \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{1.17}$$

Заметим, что $\Lambda^p V = \{0\}$ для $p > \dim V$; в самом деле, $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p \neq 0$ тогда и только тогда, когда все a_i линейно независимы.

Определение 3. Элементы $\Lambda^p V$ называются *p-векторами* или *поливекторами*, а само $\Lambda^p V$ — *p-той внешней степенью* V.

Введем обозначение:

$$\Lambda V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p V = \bigoplus_{p=0}^{\dim V} \Lambda^p V. \tag{1.18}$$

Определение 4. *Алгеброй Грассмана* векторного пространства V называется пространство ΛV, наделенное операцией $\wedge : \Lambda V \times \Lambda V \to \Lambda V$, действующей по правилу:

$$(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n, b_1 \wedge \ldots \wedge b_m) \mapsto a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \ldots \wedge b_m. \tag{1.19}$$

Задача 4. Проверьте, что получилась ассоциативная алгебра.

Операцию $\wedge$ называют *внешним умножением*, удобно обозначать ее тем же символом, который мы использовали для записи поливекторов — более того, можно было бы определить операцию $\wedge$ как билинейную, ассоциативную и такую, что $a \wedge a = 0$ для всех $a \in \Lambda^1 V = V$, в таком случае p-вектора становятся линейными комбинациями внешних произведений p штук векторов из $\Lambda^1 V = V$.

Пусть $\dim V = n$, а $\{e_i\}$ — базис V. Заметим, что базис ΛV — это строки вида $e_1 \wedge \ldots e_n$, где каждый из e_i может быть пропущен, а, поскольку их n штук, это дает $\dim \Lambda V = 2^n$. С другой стороны, мы уже знаем, что $\dim \Lambda^p V = C_n^p$, так что приводит нас к известному комбинаторному факту[2]:

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n.$$

Замечание. Описанная конструкция внешней алгебры переносится на случай бесконечномерного V, однако размерности пространств p-векторов для $p > 0$ становятся бесконечными, а прямая сумма $\Lambda V = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p V$ не обрывается на конечном количестве слагаемых.

[2]Простейшее доказательство: $(1+1)^n = 2^n$

1.3 Морфизмы и идеалы

Определение 5. Пусть A, B — алгебры. *Гомоморфизмом алгебры A в B* называется линейное отображение $\varphi : A \to B$, такое, что

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b). \tag{1.20}$$

Терминологическое напоминание Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм[3]. Его называют...

- ...*мономорфизмом*, *инъекцией*, *вложением*, если $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$.
- ...*эпиморфизмом*, *сюръекцией*, *наложением*, *отображением на*, если $\varphi(A) = B$.
- ...*изоморфизмом*, *биекцией*, если он мономорфен и эпиморфен одновременно.
- ...*эндоморфизмом*, если $A = B$.
- ...*автоморфизмом*, если он есть изоморфизм и эндоморфизм.

Определение 6. Пусть A — алгебра, ее подмножество $B \subset A$ называют *подалгеброй*, если B — алгебра (относительно наследуемых из A операций.

Определение 7. *Левым идеалом* алгебры A называется такое ее подпространство I, что $AI \subset I$, то есть для любых $a \in A, i \in I$ выполнено $ai \in I$. В *правом идеале* $IA \subset I$. *Идеалом* или *двухсторонним идеалом* называется подпространство A, которое есть левый и правый идеал.

Заметим, что идеалы являются подалгебрами. Любая алгебра содержит два неинтересных идеала $\{0\}$ и A, их называют *несобственными*, а все остальные — *собственными*. Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм, тогда $\varphi(A)$ — подалгебра в B, а $\ker\varphi$ — двухсторонний идеал в A (ядром гомоморфизма $\ker\varphi$, разумеется, называется полный прообраз нуля). Если A — алгебра с единицей 1, то $\varphi(1)$ — единица в $\varphi(A)$ (но, вообще говоря, не единица в B). Прообраз идеала — идеал, гомоморфные образ идеала — идеал в образе алгебры.

Пусть $\{I_i\}$ — семейство идеалов алгебры A, тогда $\cap I_i$ — снова идеал, поэтому корректно следующее определение.

Определение 8. Пусть S — подмножество A, тогда *идеалом, порожденным S*, называют множество (S), обладающее свойствами:

1. (S) — идеал в A;
2. $S \subset (S)$;

[3] любых алгебраических структур, не обязательно алгебр

3. (S) содержится в любом идеале, удовлетворяющем первым двум свойствам.

Идеал (S) существует и единственен; можно сконструировать его, пересекая все идеалы, содержащие S. Очевидно, что идеал, содержащий единицу (или любой обратимый элемент) совпадает со всей алгеброй. Идеал, порожденный одноэлементным множеством, называется *главным*.

Вообще, идеалы во многом аналогичны нормальным делителям. Поясним эту мысль следующим сюжетом.

Определение 9. Пусть I — двухсторонний идеал алгебры A. Тогда *факторалгеброй* A/I называют векторное пространство $A/I = \{a + I : a \in A\}$ с операцией умножения

$$(a + I)(b + I) = (ab + I). \tag{1.21}$$

Проверьте, что это корректно наделяет факторпространство A/I структурой алгебры.

Задача 5. Покажите, что фактор по одностороннему идеалу, вообще говоря, не является алгеброй.

Если A — алгебра с единицей, то A/I — тоже. Верно ли обратное? Каноническая проекция $\pi : A \to A/I$ — гомоморфизм. Гомоморфный образ алгебры изоморфен факторалгебре по ядру гомоморфизма:

$$A/\ker\varphi = \varphi(A). \tag{1.22}$$

Определение 10. Пусть A, B — алгебры. Тогда на прямой сумме векторных пространств $A \oplus B$ есть структура алгебры с умножением

$$(a \oplus b)(c \oplus d) = (ac \oplus bd). \tag{1.23}$$

Эта алгебра называется *прямой суммой* A и B и обозначается $A \oplus B$.

В $A \oplus B$ есть идеалы $A \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus B$, причем $(A \oplus B)/(A \oplus \{0\}) = B$, $(A \oplus B)/(\{0\} \oplus B) = A$. Прямая суммой ассоциативна: алгебры $(A \oplus B) \oplus C$ и $A \oplus (B \oplus C)$ изоморфны.

Задача 6. Докажите все упомянутые в параграфе утверждения и придумайте какие-нибудь другие.

1.4 Тензоры

Сейчас мы опишем важную конструкцию — тензорное произведение векторных пространств. Тензоры позволяют дать компактное единообразное описание многих объектов линейной алгебры; это не столько самостоятельная область, сколько полезный и широкоупотребимый язык. Владеть им совершенно необходимо.

Чтобы не загромождать изложение, мы будем говорить в терминах линейных пространств, хотя почти все в этом пункте элементарно переносится на случай модулей над коммутативными кольцами; призываем заинтересованных убедиться в этом.

Пусть A, B — линейные пространства над $\mathbb{K}$, не обязательно конечномерные. Рассмотрим над $\mathbb{K}$ линейное пространство $\langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \{(a,b)\}_{a \in A, b \in B} \rangle_{\mathbb{K}}$, базисом которого является все декартово произведение[4] $A \times B$. Это очень «большое» пространство; скажем, если, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, а A и B хотя бы одномерны, то $\langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}}$ имеет континуальную размерность. Особо подчеркнем, что элементы $(a, 0)$ и $(2a, 0)$ (где $a \in A$, $a \neq 0$) являются линейно независимыми в $\langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}}$ как и любые другие две различные пары, а их сумма — просто формальное выражение $(1a, 0) + (2a, 0) = 1 \cdot (a, 0) + 1 \cdot (2a, 0)$, но **ни в коем случае** не $(3a, 0)$ и не $3(a, 0)$.

Теперь рассмотрим в $\langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}}$ подпространство W, натянутое на всевозможные вектора следующих типов:

$$(a + b, c) - (a, c) - (b, c) \tag{1.24}$$

$$(a, c + d) - (a, c) - (a, d) \tag{1.25}$$

$$\lambda(a, c) - (\lambda a, c) \tag{1.26}$$

$$\lambda(a, c) - (a, \lambda c) \tag{1.27}$$

Определение 11. *Тензорным произведением пространств A и B* называется факторпространство $\langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}} / W$, обозначают его $A \otimes B$. Если нужно явно указать поле (или кольцо), над которым оно строится, то пишут $A \otimes_{\mathbb{K}} B$. Элементы $A \otimes B$ называются *тензорами.*

Заметим, что на этом факторе сложение уже идет по интуитивному правилу $[(1a, 0)] + [(2a, 0)] = 1 \cdot [(a, 0)] + 1 \cdot [(2a, 0)] = [(3a, 0)] = [3(a, 0)]$, где $[(1a, 0)]$ обозначает класс эквивалентности элемента $(1a, 0)$. Собственно, этого мы и добивались, что объясняет вид векторов 1.24-1.27. В самом деле, на факторе все комбинации такого вида перейдут в нулевой класс.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes"] & \langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}} \arrow[r, "\pi"] & A \otimes B \end{tikzcd} \tag{1.28}$$

Отображение $i : A \times B \to \langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}}$ есть просто вложение $i : (a, b) \mapsto (a, b)$. Отображение $\pi : \langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}} \to \langle A \times B \rangle_{\mathbb{K}} / W = A \otimes B$ — каноническая проекция.

Определение 12. Определим композицией i и π операцию $\otimes = \pi i : A \times B \to A \otimes B$. Образ пары (a, b) относительно $\otimes$, обозначаемый $a \otimes b$, называется *тензорным произведением векторов a и b*. Все такие тензоры называются *разложимимы.*

[4]Напомним, что *декартовым произведением* $A \times B$ множеств A, B называется множество всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$

Задача 7. Приведите пример неразложимого тензора. Покажите, что всякий тензор есть сумма разложимых. Единственно ли такое разложение?

Разложимостью по разложимым пользуются постоянно: часто на них, например на разложимом базисе (см. задачу 10), удобно определять операции, распространяя их на произвольные тензоры по линейности.

Определение 13. Пусть, A, B, C — линейные пространства. Напомним, что отображение $\varphi : A \times B \to C$ называется *билинейным*, если оно линейно по каждому аргументу:

$$\varphi(a + b, c) = \varphi(a, c) + \varphi(b, c) \tag{1.29}$$
$$\varphi(a, c + d) = \varphi(a, c) + \varphi(a, d) \tag{1.30}$$
$$\lambda\varphi(a, c) = \varphi(\lambda a, c) = \varphi(a, \lambda c) \tag{1.31}$$
$$\tag{1.32}$$

Задача 8. Покажите билинейность тензорного произведения векторов.

Задача 9. Покажите, что попарно изоморфны пространства:

1. $(A \otimes B) \otimes C$ и $A \otimes (B \otimes C)$ (благодаря этому изоморфизму мы будем в дальнейшем опускать скобки).
2. $A \otimes B$ и $B \otimes A$.
3. $(A \oplus B) \otimes C$ и $(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
4. $C \otimes (A \oplus B)$ и $(C \otimes A) \oplus (C \otimes B)$

Задача 10. Пусть A, B — конечномерные линейные пространства, $\{e_i\}$ — базис в A, $\{f_i\}$ — базис в B. Докажите, что $\{e_i \otimes f_j\}$ есть базис в $A \otimes B$, вычислите $\dim A \otimes B$.

Определение 14. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в A, $\mathcal{B}$ — в B. Тогда на $A \otimes B$ определен линейный оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, действующий по правилу:

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(a \otimes b) = (\mathcal{A}a) \otimes (\mathcal{B}b). \tag{1.33}$$

Оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ называют *тензорным произведением операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$.

Задача 11. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы в A и B соответственно, причем $\dim A = \alpha < \infty, \dim B = \beta < \infty$. Вычислите след и определитель $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Определение 15. Пусть V_i, W — векторные пространства над $\mathbb{K}$. Напомним, что отображение $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ называется *полилинейным* (или *n-линейным*), если оно линейно по каждому аргументу.

Пусть $\varphi : V_1 \times \ldots V_n \to W$ полилинейно. Тогда существует и единственно такое линейное отображение $\varphi' : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, что $\varphi = \varphi' \otimes$ (определение отображения $\otimes$ имеет номер 12); запишем в виде коммутативной[5] диаграммы:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[d, "\varphi'"] \\ & W \end{tikzcd} \tag{1.34}$$

Это свойство называется *универсальностью* тензорного произведения, оно позволяет заменять полилинейные отображения более понятными линейными. За него мы и боролись.

Обратно, линейное отображение $\varphi' : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ продолжается до полилинейного $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ (композицией с $\otimes$). Таким образом, интересуясь полилинейными отображениями, иметь дело с декартовыми произведениями необязательно — достаточно тензорных.

Задача 12. Докажите предыдущее свойство.

Теперь мы могли бы сказать, что алгебра — это модуль A вместе с линейным отображением $A \otimes A \to A$ (умножением).

Определение 16. Пусть V_i — векторные пространства над $\mathbb{K}$. *Полилинейной (n-линейной) формой* (*функционалом*) на $V_1 \times \ldots \times V_n$ называется линейное отображение из $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ в $\mathbb{K}$ или, эквивалентно, полилинейное из $V_1 \times \ldots \times V_n$ в $\mathbb{K}$. Если все $V_i = V$, говорят о полилинейной форме на V.

Символ A^* означает двойственное к A пространство.

Задача 13. Пусть V_i — конечномерные линейные пространства над $\mathbb{K}$. Покажите, что пространство полилинейных форм на $V_1 \times \ldots \times V_n$ изоморфно $(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)^*$ и $V_1^* \otimes \ldots \otimes V_n^*$.

Введем обозначение: $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}$, а $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$

Пусть ϕ, ψ — n- и m-линейные формы соответственно. Иначе говоря, $\phi \in (V^{\otimes n})^*$, $\psi \in (V^{\otimes m})^*$. Тогда из них можно изготовить $(n+m)$-линейную форму:

$$\phi\psi : (v_1, \ldots, v_{n+m}) \mapsto \phi(v_1, \ldots, v_n)\psi(v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}), \text{где все } v_i \in V. \tag{1.35}$$

Это умножение задает на полилинейных формах структуру алгебры.

[5]Коммутативность диаграммы означает, что, двигаясь по стрелкам от одного пункта к другому, мы получаем один и тот же результат независимо от выбора соединяющего их маршрута

Задача 14. Пусть A, B — алгебры над $\mathbb{K}$. Покажите, что на тензорном произведении векторных пространств $A \otimes B$ можно ввести структуру алгебры с умножением по формуле

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac) \otimes (bd). \tag{1.36}$$

Полученную алгебру $A \otimes B$ называют *тензорным произведеним алгебр A и B*.

Задача 15. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{K}$. Покажите, что $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}$ изоморфно V. В частности, $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = \mathbb{K}$ (даже как алгебры).

Задача 16. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{K}$, а $\mathbb{K}$ — подполе поля $\mathbb{L}$. Покажите, что $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ обладает структурой линейного пространства над $\mathbb{L}$ (умножение на скаляры $l \in \mathbb{L}$ происходит так: $l \times v \otimes l' \mapsto v \otimes l'l$). Эта конструкция позволяет расширить поле скаляров.

Замечание. Наиболее часто встречающийся вариант $\cdot \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ называется *комплесификацией*.

Замечание. Предыдущая конструкция дает одно из интуитивных представлений о тензорном произведении A и B — оно есть, неформально говоря, линейное пространство (или алгебра) A с коэффициентами из линейного пространства (или алгебры) B или, наоборот, B с коэффициентами из A. Попробуйте осознать это наблюдение, взяв для примера какие-нибудь несложные A и B (прекрасно подойдет $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$).

Пусть A, B — векторные пространства над $\mathbb{K}$, символом $\mathrm{Hom}(A, B)$ обозначим пространство линейных операторов $A \to B$.

Задача 17. Пусть A, B — конечномерные линейные пространства над $\mathbb{K}$. Введем отображение $\varphi : A^* \otimes B \to \mathrm{Hom}(A, B)$, сопоставляя $f \otimes g$, где $f \in A^*, g \in B$, оператор $\varphi(f \otimes g) : A \to B$, действующий по правилу

$$\varphi(f \otimes g) : v \mapsto f(v)g, \tag{1.37}$$

где $f(v)$ — значение формы f на векторе v (это значение есть число, так что $f(v)g$ — вектор из B). Покажите, что $\varphi : A^* \otimes B \to \mathrm{Hom}(A, B)$ — изоморфизм. В частности, имеет место изоморфизм $L^* \otimes L = \mathrm{Hom}(L, L)$.

Задача 18. A, B, C — конечномерные линейные пространства над $\mathbb{K}$. Введем отображение $\varphi : \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ по правилу:

$$\varphi : (f : a \otimes b \mapsto f(a \otimes b)) \mapsto (g : a \mapsto (b \mapsto f(a \otimes b))). \tag{1.38}$$

То есть, оператор $f : a \otimes b \mapsto f(a \otimes b)$ (где $f(a \otimes b) \in C$), перейдет под действием φ в оператор g, который, в свою очередь, сопоставит вектору a оператор, отображающий b в $f(a \otimes b)$. Покажите, что φ — изоморфизм.

Определение 17. *Тензорной алгеброй* линейного пространства V называется пространство

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}, \tag{1.39}$$

снабженное умножением

$$\otimes : (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n, a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+m}) \mapsto a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+m}. \tag{1.40}$$

Это ассоциативная алгебра; ее размерность бесконечна, если $\dim V \geq 1$.

Задача 19. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис V. Докажите, что алгебра $T(V)$ изоморфна свободной алгебре[6] с алфавитом $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Задача 20. Докажите, что алгебра $T(V^*)$ изоморфна алгебре полилинейных форм[7] на V.

1.5 Градуировки и соотношения

Задача 21. Пусть R — подпространство $T(V)$. Покажите, что

$$(R) = T(V)RT(V) = \{\sum \lambda_k t_k \otimes r_k \otimes t'_k : r_k \in R, t_k, t'_k \in T(V), \lambda_k \in \mathbb{K}\}, \tag{1.41}$$

где (R) — идеал, порожденный R, а сумма в скобках — конечная.

Определение 18. Пространство V называется *пространством образующих*, а R — *пространством соотношений* факторалгебры $T(V)/(R)$. Пусть $A = T(V)/(R)$, если V может быть выбрано конечномерным, то алгебра A называется *конечно порожденной*, а если конечномерным может быть выбрано еще и R, то A называется *конечно представимой*.

Задача 22. Докажите, что всякая конечномерная ассоциативная алгебра над полем конечно представима.

Определение 19. Алгебра A называется *градуированной* или $\mathbb{Z}$-*градуированной*, если она разлагается в прямую сумму подпространств $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, причем $A^iA^j \subset A^{i+j}$ (подпространства A^i, называемые *компонентами градуировки*, могут быть нульмерными). Более общо: если G — группа (полугруппа, моноид), то G-*градуированной алгеброй* называется алгебра $A = \bigoplus_{g\in G} A^g$, а умножение устроено так, что $A^gA^{g'} \subset A^{gg'}$, где gg' означает групповое (полугрупповое) произведение g и g'. Если $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, алгебра называется *биградуированной.* Если $G = \mathbb{Z}_2$, то пространство A^0 называют *четным*, а A^1 — *нечетным.*

Если в градуированной алгебре есть единица, то она лежит в нулевой компоненте. Нулевая компонента есть подалгебра градуированной алгебры.

[6] определение см. на стр. 4

[7] с умножением по формуле 1.35

Замечание. Все алгебры — градуированные: достаточно взять $A^0 = A$, $A^i = \{0\}$ для $i \neq 0$. Не очень-то это интересно, обычно имеется в виду более содержательное разложение.

Задача 23. Покажите, что $\mathbb{K}[G]$ (групповая алгебра) является G-градуированной, причем так, что для всех подпространств $\dim \mathbb{K}[G]^g = 1$.

Задача 24. Пусть A — G-градуированная алгебра, а G' — факторгруппа G (или, эквивалентно, G' — гомоморфный образ G). Покажите, что A — G'-градуированная.

Часто встречается случай $G = \mathbb{Z}$, а $G' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.

Задача 25. Укажите естественную градуировку прямой суммы и тензорного произведения градуированных алгебр.

Задача 26. Пусть R — подпространство $T(V)$, такое, что $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R^i$, притом $R^i \subset T^i(V) = V^{\otimes i}$. Покажите, что $T(V)/(R)$ — градуированная алгебра. В частности, $T(V)/\{0\} = T(V)$ — градуированная алгебра (с разложением 1.39).

Определение 20. Алгебра $S(V) = T(V)/(\{a \otimes b - b \otimes a\})$ называется *симметрической алгеброй* пространства V. Умножение на ней традиционно обозначается знаком $\vee$. $S(V)$ по утверждению предыдущей задачи наследует градуировку из $T(V)$, ее i-ая компонента (состоящая из линейных комбинаций векторов вида $a_{k_1} \vee \ldots \vee a_{k_i}$) называется *$i$-й симметрической степенью* V и обозначается $S^i(V)$.

Задача 27. Покажите, что алгебра *симметрических форм* $S(V^*)$ изоморфна алгебре полиномиальных функций на V, а $S^i(V)$ — пространству полиномов i-й степени, не содержащих младших степеней.

Определение 21. Пусть есть двумерная вещественная алгебра с базисом $1, i$, причем 1 — единица алгебры (нейтральный элемент по умножению) и выполнено соотношение $i^2 = \epsilon$. Это полностью характеризует алгебру. Она называется алгеброй *комплексных чисел*, если, разумеется, $\epsilon = -1$, *двойных чисел* при $\epsilon = 1$ и *дуальных чисел* при $\epsilon = 0$.

Кватернионы $\mathbb{H}$ — четырехмерная вещественная алгебра с базисом $1, i, j, k$, причем 1 — единица $\mathbb{H}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij = k = -ji$. *Паракватернионы* похожи на $\mathbb{H}$, но в них $j^2 = k^2 = 1$ (остальные свойства сохраняются).

Заметим, что $\mathbb{H}$ — ассоциативная *алгебра с делением* (всякий ненулевой кватернион обратим), такие алгебры называются *телами.* Разумеется, *поля* есть коммутативные тела.

Задача 28. Докажите обратимость ненулевых кватернионов, предъявив формулы для произведения произвольных кватернионов, определение сопряженного кватерниона и явное выражение для обратного.

Определение 22. Пусть на векторном пространстве V задана симметричная билинейная форма $w(\cdot,\cdot)$. *Алгеброй Клиффорда* называют алгебру $Cl(V,w) = T(V)/(\{a_i a_j + a_j a_i - 2\cdot w(a_i,a_j)\})$.

Задача 29. Реализуйте комплексные, двойные и дуальные числа, кватернионы, паракватернионы, $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ как вещественные алгебры Клиффорда.

Замечание. Двойные, дуальные и паракватернионы можно забыть навсегда.

Для пункта $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ попробуйте применить *матрицы Паули*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Определение 23. Объект

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 \Leftrightarrow i \neq j \end{cases} \tag{1.43}$$

называется *символом Кронекера*. Иногда его правильнее обозначать как δ^i_j (см. раздел 1.6).

Определим также символ $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k}$ с k индексами, каждый из которых — целое число от 1 до k следующими соотношениями:

$$\varepsilon_{12\dots k} = 1, \tag{1.44}$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k} \text{ антисимметричен по любым двум соседним значкам} \tag{1.45}$$

Эти требования полностью определяют $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Его называют *символом Леви-Чивита*.

Задача 30. Найдите $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$ (в терминах символов Кронекера), подразумевается суммирование по повторяющемуся значку. Найдите выражение для определителя матрицы (в терминах символа Леви-Чивита и столбцов матрицы).

Задача 31. Покажите, что для матриц Паули имеют место соотношения:

$$[\sigma_l, \sigma_m] = 2i\,\varepsilon_{lmn}\,\sigma_n, \tag{1.46}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{1.47}$$

$$\det \sigma_i = -1 \tag{1.48}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma_i = 0 \tag{1.49}$$

где $[a,b] = ab - ba$, а $\{a,b\} = ab + ba$.

Определение 24. *Алгеброй Грассмана* пространства V называется градуированная алгебра $\Lambda V = T(V)/(\{a\otimes b + b\otimes a\})$. Умножение в ней обозначают значком $\wedge$.

Другие названия ΛV — *внешняя алгебра*, *алгебра антикоммутирующих многочленов*, *алгебра переменных нечетной степени*.

Заметим, что алгебры ΛV и $Cl(V,w)$ изоморфны как алгебры при $w=0$ и как линейные пространства при любой w. Градуировка, индуцируемая из тензорной алгебры, совпадает с встречавшимся нам ранее разложением 1.18.

Задача 32. Покажите, что определения алгебры Грассмана, данные на страницах 6 и 15, задают изоморфные алгебры.

Задача 33. Рассмотрим разложение $\Lambda V = \Lambda^{(0)}V \oplus \Lambda^{(1)}V$:

$$\Lambda^{(0)}V = \bigoplus \Lambda^i V, \qquad i = 2n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.50}$$

$$\Lambda^{(1)}V = \bigoplus \Lambda^i V, \qquad i = 2n+1, n \in \mathbb{Z}. \tag{1.51}$$

Покажите, что это дает $\mathbb{Z}_2$-градуировку ΛV. Покажите, что $\Lambda^{(0)}V$ — коммутативная алгебра. Более того, ее элементы коммутируют со всеми элементами ΛV.

Задача 34. Докажите свойство *суперкоммутативности*:

$$a \wedge b = (-1)^{\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(b)} b \wedge a, \tag{1.52}$$

где каждый из элементов a, b лежит либо в $\Lambda^{(0)}V$, либо в $\Lambda^{(1)}V$, а $\mathrm{sgn}(v)$ определяется как

$$\mathrm{sgn}(v) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow v \in \Lambda^{(0)}V, \\ 1 \Leftrightarrow v \in \Lambda^{(1)}V. \end{cases}$$

Задача 35. Пусть $a \in \Lambda^i V$ и $a \neq 0$. Рассмотрим оператор $M_a : V \to \Lambda^{i+1}V$, действующий по правилу $M_a : v \mapsto v \wedge a$. Докажите, что $\dim\ker M_a \leq i$ и что $\dim\ker M_a = i$ тогда и только тогда, когда a разложим, то есть $a = a_1 \wedge \ldots \wedge a_i$, где $a_i \in V$.

Задача 36. Определите *алгебру кососимметрических форм* на V и покажите, что она изоморфна алгебре $\Lambda(V^*)$.

Задача 37. Пусть A — оператор на V, $\dim V = n$, а $\{e_i\}$ — базис в V. Тогда на $\Lambda^n V$ индуцируется отображение:

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \mapsto (Ae_1) \wedge \ldots \wedge (Ae_n). \tag{1.53}$$

Но $\dim \Lambda^n V = 1$, поэтому $(Ae_1) \wedge \ldots \wedge (Ae_n) = |A| e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Покажите, что число $|A|$ не зависит от выбора базиса и равно определителю A.

Замечание. Можно использовать число $|A|$ из предыдущей задачи в качестве определения определителя оператора, тогда известное равенство $\det AB = \det A \det B$ становится почти очевидным.

Временно (до задачи 41 включительно) мы полагаем характеристику[8] $\mathbb{K}$ нулевой (можно считать, что $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Определение 25. Пусть $\mathrm{sgn}(p)$ — знак p, где p — перестановка n чисел. Введем на $V^{\otimes n}$ два оператора:

$$\mathrm{Alt}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) a_{p(1)} \otimes \ldots \otimes a_{p(n)} \tag{1.54}$$

$$\mathrm{Sym}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} a_{p(1)} \otimes \ldots \otimes a_{p(n)} \tag{1.55}$$

Суммирование ведется по всевозможным перестановкам. Alt называют *альтернатором*, а Sym — *симметризатором*.

Задача 38. Покажите, что Alt и Sym — идемпотенты (*идемпотентом* называется такой P, что $P^2 = P$).

Идемпотентность — характеристическое свойство проекторов. Операторы Alt и Sym проектируют на подпространства $T(V)$, называемые соответственно *пространством кососимметрических тензоров* $\Lambda T(V)$ и *пространством симметрических тензоров* $ST(V)$.

Задача 39. Покажите, что имеет место включение идеалов $(a \otimes b + b \otimes a) \subset \ker \mathrm{Alt}$ и $(a \otimes b - b \otimes a) \subset \ker \mathrm{Sym}$.

Задача 40. Покажите, что операция умножения

$$a \wedge b = \mathrm{Alt}(a \otimes b) \tag{1.56}$$

задает на $\Lambda T(V)$ структуру алгебры, изоморфной ΛV.

Задача 41. Покажите, что операция умножения

$$a \vee b = \mathrm{Sym}(a \otimes b) \tag{1.57}$$

задает на $ST(V)$ структуру алгебры, изоморфной $S(V)$.

Если есть оператор A на V, то на тензорных, симметрических и внешних степенях (алгебрах) V индуцируются операторы (тензорные степени A) по правилу

$$A'_T : v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto (Av_1) \otimes \ldots \otimes (Av_n), \tag{1.58}$$

$$A'_S : v_1 \vee \ldots \vee v_n \mapsto (Av_1) \vee \ldots \vee (Av_n), \tag{1.59}$$

$$A'_\Lambda : v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto (Av_1) \wedge \ldots \wedge (Av_n), \tag{1.60}$$

---

[8] *характеристикой* поля $\mathbb{K}$ называется наименьшее целое положительное число $\mathrm{char}(\mathbb{K})$, такое, что $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\mathrm{char}(\mathbb{K})} = 0$, если $n \cdot 1 \neq 0$ для любого целого положительного n, полагают $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$.

Более общо, имея операторы $A_i : V_i \to W_i$, можно изготовить их *тензорное произведение* — оператор

$$\bigotimes A_i : \bigotimes V_i \to \bigotimes W_i, \tag{1.61}$$

$$\bigotimes A_i : v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto (A_1 v_1) \otimes \ldots \otimes (A_n v_n). \tag{1.62}$$

Частные случаи мы рассмотрели в определении 14 и задаче 37. Это дает законы преобразования тензоров при смене базиса в V_i оператором A_i (в частности, в алгебрах $S(V)$ и ΛV, которые мы отождествили с некоторыми подпространствами в $T(V)$ в задачах 40 и 41).

Задача 42. Покажите, что если $\det A_i \neq 0$, то и $\det \bigotimes A_i \neq 0$, то есть, что тензорное произведение невырожденных операторов невырожденно, что и дает возможность индуцированной замены базиса в тензорных произведениях.

1.6 Тензоры (дополнительная информация)

Сведения из текущего раздела в дальнейшем, видимо, использованы не будут.

Определение 26. Пусть дан изоморфизм $\varphi : V \to V^*$. Тогда индуцируются изоморфизмы

$$\varphi' : V \otimes \ldots \otimes V_n \to \varphi(V) \otimes \ldots \otimes V_n = V^* \otimes \ldots \otimes V_n, \tag{1.63}$$

$$\varphi'^{-1} : V^* \otimes \ldots \otimes V_n \to \varphi^{-1}(V^*) \otimes \ldots \otimes V_n = V \otimes \ldots \otimes V_n. \tag{1.64}$$

Оператор φ' называют *опусканием индекса*, а φ'^{-1} — *подъемом.*

Изоморфизм $\varphi : V \to V^*$ часто задают с помощью невырожденной симметричной билинейной формы g (ее принято называть *метрическим тензором*). В частности, евклидово, псевдоевклидово или унитарное пространство канонически изоморфно двойственному (в унитарном случае форма g не билинейна, а полуторалинейна). Псевдоевклидовое пространство отличается от евклидового тем, что вместо положительной определенности g (скалярного произведения) мы требуем лишь невырожденность; пример — пространство Минковского — четырехмерное вещественное пространство с формой

$$g((ct, x^1, x^2, x^3), (c\tilde{t}, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)) = c^2 t\tilde{t} - x^1\tilde{x}^1 - x^2\tilde{x}^2 - x^3\tilde{x}^3 \tag{1.65}$$

(*интервалом*). Замечая, что по существу важна только сигнатура g, пространство Минковского часто обозначают символом $\mathbb{R}^{1,3}$.

Определение 27. *Сверткой* называется оператор $\psi : V \otimes V^* \otimes V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, действущий по правилу:

$$\psi : a \otimes b \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto b(a) \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, \tag{1.66}$$

где число $b(a)$ есть вычисление формы $b \in V^*$ на векторе $a \in V$.

Для краткости мы определили опускание и подъем для первого индекса, а свертку для первых двух, для других индексов операции вводится абсолютно аналогично. Эти операции позволяют получать важные *инварианты* тензоров (простейшие примеры — норма вектора и след оператора).

Определение 28. Пространство $T^p_q(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$ назовем *пространством* (p,q)*-тензоров*. Элементы $T^p_q(V)$ называются p раз *контравариантными* и q раз *ковариантными* тензорами, (p,q)*-тензорами* или просто *тензорами*. Число $(p+q)$ называется *валентностью* тензора.

На пространстве $T^{\cdot}_{\cdot}(V) = \bigoplus T^p_q(V) = T(V) \otimes T(V^*)$ есть структура биградуированной алгебры с умножением

$$\otimes : T^p_q(V) \times T^{p'}_{q'}(V) \to T^{p+p'}_{q+q'}(V). \tag{1.67}$$

Остаются в силе уважающие градуировку операторы опускания индекса $\varphi' : T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q+1}(V)$, подъема индекса $\varphi'^{-1} : T^p_q(V) \to T^{p+1}_{q-1}(V)$ и свертки $\psi : T^p_q(V) \to T^{p-1}_{q-1}(V)$.

Определение 29. Алгебру $T^{\cdot}_{\cdot}(V)$ называют *тензорной алгеброй* V, но мы сохраним это название для $T(V)$.

Заметим, что пара (p,q) есть номер компоненты биградуировки $T^{\cdot}_{\cdot}(V)$, а валентность — номер компоненты градуировки. Многие компоненты $T^{\cdot}_{\cdot}(V)$ пристально изучаются в линейной алгебре. Их возможные интерпретации можно задать, например, такими изоморфизмами:

- $T^1_0(V)$ — само пространство V, $T^0_1(V)$ — 1-формы на V (ковекторы),
- $T^1_1(V)$ — операторы на V, $T^k_k(V)$ — операторы на $V^{\otimes k}$,
- $T^0_2(V)$ — билинейные формы на V, $T^2_0(V)$ — билинейные формы на V^*,
- $T^p_q(V)$ — операторы $\mathrm{Hom}(V^{\otimes q}, V^{\otimes p})$.

Заметим, что изоморфизмы $T^0_p(V) = T^p_0(V^*) = (T^p_0(V))^*$ нам уже встречались (задачи 13 и 20).

Хотя нам это не понадобится, дадим краткое описание координатного подхода к тензорной алгебре.

Пусть в V фиксирован базис $\{e_i\}$, двойственный базис в V^* обозначим как $\{e^j\}$ (двойственность базисов означает, что $e^j(e_i) = \delta^j_i$. Тогда в T^p_q есть базис $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}\}$, коэффициент разложения (p,q)-тензора T по нему обозначим как $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. Тогда для координат произведения тензоров $R = T \otimes S$ выполнено тождество:

$$R^{i_1\ldots i_p n_1\ldots n_r}_{j_1\ldots j_q m_1\ldots m_s} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} S^{n_1\ldots n_r}_{m_1\ldots m_s}. \tag{1.68}$$

Если замена координат на V задана матрицей $C : f_i = C^j_i e_j$ (по повторяющимся индексам происходит суммирование), то, как известно, двойственный базис преобразуется матрицей $(C^{-1})^T = \widetilde{C} : f^i = \widetilde{C}^i_j e^j$. Тогда, новые координаты T в базисе $\{f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_p} \otimes f^{j_1} \otimes \ldots \otimes f^{j_q}\}$ выражаются через старые по формуле:

$$T'^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = C^{i_1}_{n_1} \ldots C^{i_p}_{n_p} \widetilde{C}^{m_1}_{j_1} \ldots \widetilde{C}^{m_p}_{j_p} T^{n_1 \ldots n_p}_{m_1 \ldots m_q}. \tag{1.69}$$

Часто тензоры определяют как наборы значков, преобразующиеся по формуле 1.69; к сожалению, такой подход имеет право на существование, будучи распространенным в физической литературе. Но мы его осуждаем!

Задача 43. Найдите координатные выражения для свертки, подъема (опускания) индекса и действия альтернатора (симметризатора).

Запись $T^{i_1 \ldots (i_l \ldots i_k) \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ означает координаты *симметризованного* по значкам $i_l \ldots i_k$ тензора, $T^{i_1 \ldots [i_l \ldots i_k] \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — *антисимметризованного* по $i_1 \ldots i_k$ (догадайтесь, что это значит, и придумайте определения). По нижним значкам аналогично.

Глава 2

Многообразия

2.1 Понятие вещественного многообразия

Механические системы со стационарными удерживающими голономными связями естественным образом приводят к вещественным гладким многообразиям в качестве конфигурационных пространств. Далее рассматриваются многообразия абстрактно, вне связи с конкретными примерами механических систем, подобные примеры предполагается рассмотреть в другой части курса.

Пусть M — произвольное множество.

Определение 30. *Картой в M* называется пара (U, ϕ), где U — подмножество в M, а $\phi : U \to \Omega$ — биекция между U и некоторым открытым подмножеством Ω в $\mathbb{R}^n$. Множество U — *область определения карты*, отображение ϕ — *картирующее отображение*. Набор из n чисел, сопоставляемых каждой точке U картирующим отображением — *локальные координаты*.

Пусть (U, ϕ) и (V, ψ) две карты, причем $W = U \bigcap V \neq \emptyset$. Тогда определено отображение

$$\psi|_W \circ (\phi|_W)^{-1} : \phi(W) \to \psi(W) \tag{2.1}$$

из множества $\phi(W) \subset \mathbb{R}^n$ в множество $\psi(W) \subset \mathbb{R}^n$. Его называют *сквозным отображением* (*сквозным морфизмом*). Далее мы будем писать $\psi \circ \phi^{-1}$ подразумевая соответствующие сужения.

Пусть Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}$. Напомним, что символом $C^r(\Omega)$ (где $r = 0, 1, \ldots$), обозначают пространство r раз непрерывно дифференцируемых вещественных функций на Ω, $C^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, а $C^\omega(\Omega)$ — вещественно аналитических функций (то есть таких, что их ряды Тейлора сходятся к ним в окрестности всех точек Ω). Имеют место строгие включения

$$C^0(\Omega) \supsetneq C^1(\Omega) \supsetneq C^2(\Omega) \supsetneq \ldots \supsetneq C^\infty(\Omega) \supsetneq C^\omega(\Omega). \tag{2.2}$$

C^r*-диффеоморфизмом* (где $r = 0, 1, ..., \infty, \omega$), называют такую биекцию $f \in C^r(\Omega)$, что обратное отображение имеет ту же гладкость: $f^{-1} \in C^r(f(\Omega))$. В определении 42 понятие диффеоморфизма будет обобщено на отображения многообразий.

Определение 31. Две карты (U, ϕ) и (V, ψ) в M называются C^r*-согласованными* ($r = 0, 1, ..., \infty, \omega$), если выполнено одно их следующих условий:

1. $W = U \bigcap V = \emptyset$

2. Множества $\phi(W)$ и $\psi(W)$ открыты в $\mathbb{R}^n$, отображение 2.1 является C^r-диффеоморфизмом.

Определение 32. Множество карт $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ называется C^r*-атласом* на M, если

1. Любые две карты этого множества C^r-согласованы.

2. Имеет место равенство
$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M \tag{2.3}$$

Мотивацией для подобного рода названий служило обычное картографирование местности.

Пример 1. На множестве $\mathbb{R}^1$, очевидно, картой может служить $(\mathbb{R}^1, x \mapsto x)$. Атлас состоит из одной карты. Другой атлас, опять же из одной карты: $\{(\mathbb{R}^1, x \mapsto x^3)\}$. Очевидно, оба атласа класса C^ω.

Упражнение 1. Возьмите на $\mathbb{R}^1$ атлас, состоящий из объединения двух карт из предыдущего примера. Какой он гладкости?

Упражнение 2. Придумайте атласы разной гладкости на $\mathbb{R}^n$.

Задача 44.

1. Покажите, что на S^1 не может быть атласа, состоящего из одной карты.

2. Постройте какой-нибудь атлас.

3. Постройте атлас из минимального числа карт. В случае, если он совпал с атласом из предыдущего пункта, постройте еще один атлас.

4. Каковы гладкости построенных атласов?

Задача 45. То же для n-мерных сфер S^n.

Задача 46. То же для двумерного тора T^2.

Задача 47. Постройте атлас для вещественного проективного пространства[1] $\mathbb{R}P^n$.

[1]Проективным пространством $\mathbb{K}P^n$ называется множество одномерных подпространств в $n+1$-мерном векторном пространстве над $\mathbb{K}$, или, что то же, фактор этого пространства без нуля по действию мультипликативной группы поля: $\mathbb{K}P^n = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{K}^*$

Задача 48. Постройте атлас для множества всех прямых в $\mathbb{R}^2$. Покажите, что полученое многообразие гомеоморфно листу Мебиуса.

Задача 49. Постройте атлас для множества обратимых матриц $GL(n, \mathbb{R})$.

Задача 50. Постройте атлас для множества ортогональных матриц $O(n, \mathbb{R})$.

Указание. Матрица A *неисключительна*, если $det(A + id) \neq 0$. Для неисключительных матриц определен кели-образ $(id - A)(id + A)^{-1}$. Неисключительная матрица тогда и только тогда ортогональна, когда ее кели-образ является кососимметрической матрицей (докажите!). Кососимметрические матрицы образуют векторное пространство. Тем самым получено картирующее отображение из окрестности единицы группы (ортогональные неисключительные матрицы) в открытое множество неисключительных кососимметричных матриц. Все остальные карты получаются правым сдвигом. Осталось показать, что карты гладко согласованы.

Задача 51. Покажите, что поверхность уровня гладкой функции, определенной во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с градиентом, отличным от нуля в каждой точке поверхности уровня, покрывается гладким атласом.

Задача 52. Покажите, что множество матриц с единичным определителем $SL(n, \mathbb{R})$ имеет гладкий атлас.

Определение 33. Два C^r-атласа $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, $\{(U_\beta, \psi_\beta)\}$ называются *эквивалентными*, если C^r-согласованы любые две карты: (U_α, ϕ_α) и (U_β, ψ_β).

Упражнение 3. Докажите, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

Упражнение 4. Докажите, что два атласа C^r-согласованы, если и только если их объединение опять является C^r-атласом.

Определение 34. Атлас называется *полным* (*максимальным*), если всякая карта, гладко согласованная с каждой картой атласа, уже принадлежит атласу.

Упражнение 5. Докажите, что в каждом классе эквивалентности атласов лежит один и только один полный атлас.

Определение 35. Класс C^r-эквивалентных атласов называется *C^r-структурой* на M.

Определение 36. C^r-многообразие — пара (M, D), где M — некоторое множество, D — C^r-структура на нем.

C^0-многообразия называют *топологическими многообразиями* (или просто *многообразиями*), соответственно структуру называют *топологической*; C^r-многообразия $(r = 1, 2, ..., \infty)$ — *гладкими*, а соответствующую структуру — *гладкой* или *дифференциальной*; C^ω-многообразия — *вещественно аналитическими*.

Определение 37. Размерность пространства $\mathbb{R}^n$ в котором действуют сквозные отображения называется *размерностью многообразия*.

Упражнение 6. Убедитесь в том, что размерность многообразия не зависит от выбора атласа.

Гладкую структуру можно восстановить, задав любой ее C^r-атлас.

Пример 2. На множестве $\mathbb{R}^n$ гладкая структура задается атласом (из одной карты) $(\mathbb{R}^n, id)$, такая гладкая структура называется *стандартной*.

Задача 53. Докажите, что картами стандартной структуры могут служить пары открытые множеств и их диффеоморфизмов с $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Если на M существует хотя бы одна C^r-структура $(r \geq 1)$, то на M существует не менее континуума C^r-структур.

Мы не будем доказывать эту теорему, дадим лишь примеры ее иллюстрирующие.

Пример 3. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^1$. Атласы вида (каждый атлас состоит из одной карты) $\{(\mathbb{R}^1, x \mapsto x^{2k+1})\}$, $k = 0, 1, 2, ...$, задают на $\mathbb{R}^1$ различные дифференциальные структуры, потому что объединение любых двух атласов такого типа дают лишь C^0-структуру. Атлас, состоящий из единственной карты, можно считать сколь угодно гладким. Тем самым построено счетное число различных C^ω-структур на $\mathbb{R}^1$.

Задача 54. Постройте континуум (и докажите, что их не больше, чем континуум) различных C^ω-структур на $\mathbb{R}^1$.

Везде далее для дифференциальных структур r предполагается фиксированным. Дифференциальная структура индуцирует на M топологию, описанную в следующем определении

Определение 38. Подмножество $A \subset M$ открыто, если для любой карты (U, ψ) множество $\psi(A \bigcap U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 7. Проверьте, что все аксиомы топологического пространства выполнены.

Определение 39. Говорят, что пространство *локально евклидово*, если каждая точка пространства имеет окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 8. Покажите, что локально евклидово пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Многообразие — локально евклидово пространство, то есть каждое многообразие удовлетворяет первой аксиоме счетности. Но, вообще говоря, многообразия в нашем определении не удовлетворяют второй аксиоме счетности.

Пример 4. Возьмем два экземляра вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, один с дискретной топологией, другой с обычной. Рассмотрим их декартово произведение (как множеств) $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ и введем на нем топологию произведения. База получившегося пространства несчетна, потому что несчетна база одного из сомножителей. Картами может служить набор из континуума диффеоморфизмов $\mathbb{R}^1$. Полученное гладкое многообразие одномерно и не обладает счетной базой.

Гладкое многообразие как топологическое пространство может быть нехаусдорфовым. Соответствующие примеры строятся довольно элементарно. Вот парочка.

Пример 5. Пусть $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{x_0, y_0\}$, $U = M \setminus \{x_0\}$, $V = M \setminus \{y_0\}$. Определим картирующие морфизмы:

$$\phi : U \to \mathbb{R}, \quad \psi : V \to \mathbb{R} \tag{2.4}$$

по формулам

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = x_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

для любого $x \in U$ и

$$\psi(y) = \begin{cases} y, & \text{если } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } y = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

для любого $y \in U$.

Получили вещественно аналитическое многообразие, и в топологии этого многообразия любые две окрестности точек x_0 и y_0 пересекаются. Построенное многообразие называется *раздвоенной в нуле прямой* (или *нехаусдорфовой прямой с особой точкой* 0 *кратности два*). Аналогично строятся *нехаусдорфовы прямые с особыми точками кратности* n, где n — натуральное число ≥ 2

Пример 6. Разобьем интервал $(0, 3)$ в несвязное объединение трех множеств: $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3)$. Окрестности точки $x_1 = 1$ имеют вид $(1 - \epsilon, 1] \cup (2, 2 + \epsilon)$. Окрестности $x_2 = 2$ имеют вид $(2 - \epsilon, 2] \cup (2, 2 + \epsilon)$. Окрестности остальных точек такие же, как в топологии, индуцированной вещественной прямой. Тогда точки x_1 и x_2 неотделимы.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на исходном множестве уже есть топология и мы вводим на нем дифференциальную структуру. Говорят, что дифференциальная структура согласована с топологией пространства, если эта структура определяет топологию, совпадающую с данной. Очевидно, что если дифференциальная структура согласована с топологией, то области определения всех картирующих морфизмов открыты. На самом деле верно и обратное, желающие могут доказать это в качестве (несложного) упражнения. В учебной литературе встречается определение гладкого многообразия как топологического пространства с фиксированной дифференциальной структурой, но это тоже самое, что говорить про метрическое пространство, что это топологическое пространство с непрерывной функцией из декартова квадрата в себя, удовлетворяющее соответствующим аксиома. Однако так удобно делать в случае, если мы фиксируем дифференциальную структуру при помощи пучка гладких функций (чтобы говорить о пучке уже нужна топология). Или, если мы хотим избежать патологий и даем определение такого типа:

Определение 40. C^r*-многообразие* — хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, с фиксированной C^r-структурой.

Нехаусдорфовы многообразия мы отбрасываем, потому что в дальнейшем нам придется рассматривать дифференциальные уравнения на многообразиях, а на нехаусдорфовом многообразии неверна теорема о единственности продолжения решения дифференциального уравнения (теорема о локальной единственности решения верна). Для многообразий со второй аксиомой счетности атлас состоит из не более чем счетного числа карт.

Задача 55. Покажите, что C^0-структура на многообразии единственна. Или, что то же самое, что топологические многообразия — это в точности локально евклидовы пространства.

Сформулируем несколько очень интересных теорем, доказательство которых выходит за план элементарного введения в основы гладких многообразий для нужд классической механики.

Теорема 2. Если на пространстве M существует C^r-структура ($r \geq 1$), то на нем существует C^∞-структура (и даже C^ω-структура), C^r-согласованная с данной.

Теорема 3. Если на пространстве M существует C^0-структура и $\dim M < 4$, то на нем существует C^1-структура (и значит C^∞-структура).

Многообразия, на которых есть C^0-структура, но невозможно ввести C^r-структуру ($r \geq 1$) называют *несглаживаемыми.*

Перейдем теперь к морфизмам многообразий. Пусть M,N — гладкие многообразия (размерностей m и n соответственно).

Определение 41. Пусть f — непрерывное отображение $f : M \to N$, x — некоторая точка M, (U, ϕ) — карта в M, такая что $x \in U$, (V, ψ) — карта в N, такая что $f(x) \in V$. Тогда имеем отображение:

$$\hat{f} = \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V) \tag{2.7}$$

Отображение f называют *гладким* в точке x, если $\hat{f}$ гладкое в точке $\phi(x)$.

Упражнение 9. Покажите, что определение гладкого отображения в точке x корректно — не зависит от выбора карт, содержащих точку x и $f(x)$.

Отображение $f : M \to N$ называют *гладким*, если он гладкое во всех точках $x \in M$.

Определение 42. Гладкое отображение $f : M \to N$ называется *диффеоморфизмом*, если

1. оно биективно,

2. обратное отображение $f^{-1} : N \to M$ гладкое.

Многообразия, между которыми есть диффеоморфизм, называют *диффеоморфными* (убедитесь, что диффеоморфность многообразий является отношением эквивалентности).

Интересной представляется задача классификации дифференциальных структур на данном множестве с точностью до диффеоморфизма. Например, известно, что все дифференциальные структуры на многообразиях размерности меньше 4 диффеоморфны, все дифференциальные структуры на $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ диффеоморфны, а на $\mathbb{R}^4$ существует континуум не диффеоморфных дифференциальных структур. В 1956 г. Дж. Милнор показал, что существуют 28 дифференциальных структур на S^7.

Рассмотрим индуцирование гладкости.

Определение 43. Пусть N — некоторое топологическое пространство, M — гладкое многообразие и $f : N \to M$ — гомеоморфизм, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ — гладкий атлас на M. Тогда $\{(f^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha \ \circ f)\}$ — атлас на N. Дифференциальную структуру, задаваемую этим атласом называют *индуцированной отображением* f .

Упражнение 10. Убедитесь в том, что $\{(f^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha \ \circ f)\}$ — атлас.

Упражнение 11. Покажите, что M и N с индуцированной дифференциальной структурой диффеоморфны.

Упражнение 12. Покажите, что дифференциальные структуры, перенесенные на N с M посредством гомеоморфизмов $f : N \to M$ и $g : N \to M$ тогда и только тогда совпадают, когда $g \circ f^{-1} : M \to M$ — диффеоморфизм.

Упражнение 13. Убедитесь в том, что множество дифференциальных структур на M, диффеоморфных данной (D) можно отождествить с пространством орбит правого действия группы $\mathrm{Diff}((M, D))$ (группой всех диффеоморфизмов (M, D) с групповой операцией композиция) на группе $\mathrm{Homeo}(M)$.

Определение 44. Если $f : M \to N$ и N — гладкое отображение многообразий, где N есть $\mathbb{R}^1$ со стандартной гладкой структурой, то f называют *гладкой функцией* на M.

Определение естественным образом распространятся на произвольное открытое множество в M. Продумайте, какие надо сказать слова, чтобы получить определение гладкой функции на произвольном множестве многообразия M.

Определение 45. Многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает атласом, для которого якобиан любого сквозного морфизма всюду положителен.

Как обычно, два ориентирующих атласа называют *эквивалентными*, если их объединение снова ориентирующий атлас (проверьте, что это отношение эквивалентности).

Определение 46. *Ориентацией* многообразия называется класс эквивалентных ориентирующих атласов.

Определение 47. *Ориентированным* многообразием называется многообразие с фиксированной ориентацией.

Теорема 4. Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает две ориентации.

Задача 56. Докажите, что ориентируемы:

1. Сферы S^n.
2. Проективные пространства нечетной размерности $\mathbb{R}P^{2n+1}$ (проективные пространства четной размерности неориентируемы).

В завершении этого параграфа укажем способ конструировать из многообразий новые.

Определение 48. Пусть (M, D_1), (N, D_2) — гладкие многообразия. На $M \times N$ вводят дифференциальную структуру, содержащую все карты вида

$$(\phi \times \psi, U \times V); \qquad (\phi, U) \in D_1, (\psi, V) \in D_2. \tag{2.8}$$

$M \times N$ с такой дифференциальной структурой называют *декартовым произведением многообразий.*

Упражнение 14. Убедитесь, что действительно получается атлас.