Глава 1

Основные понятия

Лекция 1

1.1 Кольца и идеалы

1.1.1 Определение. *Кольцо* – множество A с операциями «+» и «·» такое, что

1. A – абелева группа относительно сложения;
2. Умножение ассоциативно;
3. $\forall x, y, z \in A : x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$.

Кольцо называют *коммутативным*, если $\forall x, y \in A : xy = yx$. Говорят, что A является *кольцом с 1*, если в нем содержится элемент 1 такой, что $\forall x \in A : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. (Такой элемент, как легко проверить, единственный.) Элемент 1 называют *единичным элементом* или *единицей*.

В дальнейшем все кольца будут предполагаться коммутативными и с 1.

1.1.2 Определение. *Гомоморфизм* колец – это отображение $\varphi : A \to B$, такое, что

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in A$;
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для всех $x, y \in A$;
3. $\varphi(1) = 1$.

1.1.3 Определение. Пусть A – кольцо. Подмножество $B \subset A$ называется *подкольцом*, если $1 \in B$, и B замкнуто относительно сложения и умножения.

1.1.4 Определение. Подмножество $\mathfrak{a} \subset A$ называется *идеалом*, если $\mathfrak{a}$ – подгруппа в $(A, +)$, и $\forall x \in \mathfrak{a} \, \forall y \in A : xy \in \mathfrak{a}$. Если X – подмножество в A, то множество

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \middle| n \geq 0,\, a_i \in A,\, x_i \in X \right\}$$

– минимальный идеал, содержащий X (идеал, *порожденный* X). Вместо $\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$ пишут $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

1.1.4.1 Замечание. Пусть $\varphi : A \to B$ – гомоморфизм. Тогда

1. Если $\mathfrak{a}$ – идеал в B, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ – идеал в A.
2. Если C – подкольцо в A, то $\varphi(C)$ – подкольцо в B.

Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A, тогда на факторгруппе $A/\mathfrak{a}$ есть каноническое умножение: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$, $A/\mathfrak{a}$ – кольцо, и отображение

$$\begin{array}{rcl}\varphi : A & \to & A/\mathfrak{a}\\ a & \mapsto & \bar{a}\end{array}$$

– сюръективный гомоморфизм колец.

1.1.4.2 Замечание. Имеется биекция, сохраняющая включения

$$\begin{array}{rcl}\{\text{идеалы в } A/\mathfrak{a}\} & \to & \{\text{идеалы в } A, \text{ содержащие } \mathfrak{a}\}\\ \mathfrak{b} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{b})\end{array}$$

1.1.5 Предложение. *Пусть $\varphi : A \to B$ – гомоморфизм колец. Тогда* $\operatorname{Ker}\varphi$ – *идеал в A,* $\operatorname{Im}\varphi$ – *подкольцо в B, и φ индуцирует изоморфизм колец $\tilde{\varphi}$: $A/\operatorname{Ker}A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}B$.* $\square$

Множество $A^* = \{a \in A | \exists b \in A : ab = 1\}$ называется множеством *единиц* [1] или *обратимых элементов* кольца A; это группа относительно умножения.

Множество *делителей нуля*: $\{a \in A|\exists b \in A\setminus\{0\} : ab = 0\}$.

Нильрадикал кольца A

$$\operatorname{Nil}A = \{a \in A|\exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$$

Легко проверить, что это идеал в A (упражнение).

Пусть $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ – идеалы в A. Тогда

$$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i = \left\{\sum_{i\in I} x_i \middle| x_i \in \mathfrak{a}_i, \text{ почти все } x_i \text{ суть } 0\right\}$$

– идеал в A.

Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ – идеалы в A. Тогда идеалами в A являются также $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$,

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \langle ab | a \in A, b \in B\rangle$$

(отметим[2], что $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$) и

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A|\exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathfrak{a}\}$$

(называется *радикалом идеала* $\mathfrak{a}$).

Идеалы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ называются *взаимно простыми*, если $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A$.

---

[1] Таким образом, слово «единица» имеет два смысла. Если есть риск путаницы, лучше сказать «единичный элемент» или «обратимый элемент». В английском языке путаницы нет: «единичный элемент» = identity, «обратимый элемент» = unit. Еще обратите внимание, что *корни из единицы*, то есть такие элементы u, что $u^n = 1$ при некотором натуральном n, по-английски называются roots of unity!

[2] В дальнейшем мы будем также для произвольных подмножеств X и Y кольца использовать обозначение

$$XY = \{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n | n \in, x_1, \ldots, x_n \in X, y_1, \ldots, y_n \in Y\}.$$

Оно, очевидно, согласуется с определением произведения идеалов.

1.1.6 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ *– идеалы в* A, $\mathfrak{a}$ *взаимно прост с* $\mathfrak{b}_1$ *и* $\mathfrak{a}$ *взаимно прост с* $\mathfrak{b}_2$. *Тогда* $\mathfrak{a}$ *взаимно прост с* $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$.

Д. Перемножить $1 = a + b_1$ и $1 = a' + b_2$. $\square$

1.1.7 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *попарно взаимно просты, тогда*

$$\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n.$$

Д. Произведение идеалов всегда содержится в пересечении. Далее,

$$\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \cdot (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subset \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,$$

индукционный переход по лемме 1.1.6.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – кольца. Тогда $\prod_{i=1}^n A_i$ с покомпонентными сложением и умножением – кольцо с единичным элементом $(1, \ldots, 1)$.

1.1.8 Теорема. (китайская теорема об остатках) *Пусть* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *– идеалы в* A,

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i, \\ a &\mapsto (a + \mathfrak{a}_1, \ldots, a + \mathfrak{a}_n). \end{aligned}$$

1. φ *сюръективно, если и только если* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *попарно взаимно просты.*
2. φ *инъективно, если и только если* $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

Д. «2» очевидно.

«1». $\Rightarrow$. Рассмотреть все $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i$.

$\Leftarrow$. Достаточно доказать, что, например, $(1, 0, \ldots, 0) \in \operatorname{Im} \varphi$. Имеем

$$1 = a_i + b_i, \quad a_i \in \mathfrak{a}_1,\ b_i \in \mathfrak{b}_i, \quad i = 2, \ldots, n;$$

возьмем $a = \prod_{i=2}^n b_i$.

1.2 Простые идеалы

Кольцо A называется *областью целостности*, если $A \neq 0$, и в A нет нетривиальных (т. е. отличных от 0) делителей нуля.

Подмножество S кольца A называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, и из $x, y \in S$ следует $xy \in S$.

1.2.1 Предложение. *Для идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* A *следующие условия эквивалентны.*
1. $A/\mathfrak{p}$ *целостное.*
2. $\mathfrak{p} \neq A$; $ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p}$ *или* $b \in \mathfrak{p}$.
3. $\mathfrak{p} \neq A$; $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{p} \implies \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ *или* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, *где* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *– идеалы в* A.
4. $A \setminus \mathfrak{p}$ *– мультипликативная система.*

Д. Каждое условие равносильно «2».

Идеал, удовлетворяющий этим условиям, называется *простым*.

1.2.2 Предложение. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *– идеал в* A, S *– мультипликативная система,* $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$.

1. $\{\mathfrak{b} | \mathfrak{b}$ *идеал в* A, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset A \setminus S\}$ *содержит максимальные (по включению) элементы.*

2. Любой такой максимальный элемент – простой идеал.

Д. «1». Лемма Цорна.

«2». Пусть $a_1 a_2 \in \mathfrak{p}$. Положим $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{p} + \langle a_1 \rangle$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p} + \langle a_2 \rangle$. Из $a_i \notin \mathfrak{p}$ и максимальности $\mathfrak{p}$ следует $\mathfrak{a}_i \cap S \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Имеем

$$u_i = p_i + a_i y_i \in S, \quad p_i \in \mathfrak{p}, \quad y_i \in A, \quad i = 1, 2,$$

откуда $u_1 u_2 \in S$, противоречие с $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$.

Идеал $\mathfrak{m} \subset A$ называется *максимальным*, если $\mathfrak{m} \neq A$, и для любого идеала $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}$ либо $\mathfrak{a} = A$, либо $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Множества простых и максимальных идеалов кольца A будут обозначаться через $\operatorname{Spec} A$ и $\operatorname{Max} A$ соответственно. [3]

1.2.2.1 Следствие. *Любой идеал содержится в максимальном.* □

1.2.2.2 Следствие. $A^* = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}$. □

Кольцо называется *локальным*, если в нем есть единственный максимальный идеал.

1.2.2.3 Следствие. A *локально, если и только если* $A \setminus A^*$ *– идеал.* □

1.2.2.4 Следствие. *Любой максимальный идеал прост.* □

1.2.2.5 Следствие. *1.* $\operatorname{Nil} A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$.

2. Если $\mathfrak{a}$ *– идеал в* A, *то*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}}} \mathfrak{p}.$$

Д. $\Rightarrow$. $a^n = 0 \implies a \in \mathfrak{p}$.

$\Leftarrow$. Пусть $a \in \bigcap \mathfrak{p}$. Рассмотреть $S = \{1, a, a^2, \dots\}$.

Лекция 2

1.2.2.6 Следствие. *В любом кольце множество делителей нуля – объединение некоторых простых идеалов.*

Д. Пусть S – множество не делителей нуля,

$$M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Элементы, кратные делителям нуля, сами являются делителями нуля. Поэтому $a \notin S \implies \langle a \rangle \cap S = \emptyset$, откуда $\langle a \rangle \subset \mathfrak{p} \in M$. Тогда множество делителей нуля есть $\bigcup_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p}$.

[3]Второе из обозначений не является стандартным; встречается также $\operatorname{Spm} A$, $\operatorname{Specm} A$.

1.2.3 Предложение. *В любом простом идеале кольца содержится минимальный простой идеал.*

Д. Использовать лемму Цорна и тот факт, что пересечение любого семейства простых идеалов, линейно упорядоченного по включению – простой идеал.

1.2.4 Определение. *Радикалом Джекобсона* кольца A называется

$$\operatorname{Jac} A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}.$$

1.2.5 Предложение. $x \in \operatorname{Jac} A$, *если и только если* $\forall y \in A : 1 - xy \in A^*$.

Д. $\Rightarrow$ очевидно. $\Leftarrow$. Пусть $x \notin \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{m}+(x) = A$, откуда $\exists y \in A, m \in \mathfrak{m} : m+xy = 1$ и $1-xy \in \mathfrak{m}$, противоречие.

1.3 Кольца частных

Пусть A кольцо, $S \subset A$ – мультипликативная система. В $A \times S$ рассмотрим отношение $\sim$:

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \overset{\text{df}}{\iff} \exists t \in S : t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0.$$

1.3.1 Предложение. *Это отношение эквивалентности.*

Д. Пусть $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ и $(a_2, s_2) \sim (a_3, s_3)$. Тогда $t_1(a_2 s_1 = a_1 s_2) = t_2(a_3 s_2 - a_2 s_3) = 0$ для некоторых $t_1, t_2 \in S$. Отсюда $t_1 t_2 s_2 (a_1 s_3 - a_3 s_1) = 0$.

Фактормножество $A \times S / \sim$ обозначается через $S^{-1}A$ (или иногда через A_S), а класс пары (a, s) через $\frac{a}{s}$.

1.3.2 Определение. Кольцом частных кольца S со знаменателями из S называется $S^{-1}A$ с операциями сложения и умножения, заданными формулами

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2},$$
$$\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}.$$

1.3.2.1 Замечание. Легко проверить, что эти операции определены корректно и задают на $S^{-1}A$ структуру кольца.

1.3.2.2 Замечание. Если S – множество всех элементов A, не являющихся делителями нуля, то $S^{-1}A$ называется *полным кольцом частных* кольца A. Если при этом A – область, $S^{-1}A$ является полем и называется *полем частных* A.

1.3.2.3 Замечание. Имеется канонический гомоморфизм

$$\begin{aligned} i = i_{A,S} : A &\to S^{-1}A \\ a &\mapsto \tfrac{a}{1}. \end{aligned}$$

Он инъективен, если и только если S не содержит делителей нуля.

1.3.3 Предложение. (свойство универсальности кольца частных) *Пусть $f : A \to B$ – гомоморфизм, S – мультипликативная система в A. Предположим, что $f(S) \subset B^*$. Тогда существует единственный гомоморфизм $f' : A_S \to B$ такой, что $f = f' \circ i_{A,S}$.*

Д. Положим $f'(\frac{a}{s}) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$. Легко проверить: корректность, гомоморфизм, единственность.

1.3.3.1 Следствие. *Если $S \subset A^*$, то $A \simeq A_S$.* $\square$

1.3.4 Определение. Пусть $f : A \to B$ – гомоморфизм, $\mathfrak{a}$ – идеал в A, $\mathfrak{b}$ – идеал в B.

Расширением идеала $\mathfrak{a}$ относительно f называют идеал кольца B, порожденный $f(\mathfrak{a})$; его иногда обозначают $\mathfrak{a} \cdot B$.

Сужением идеала $\mathfrak{b}$ относительно f называют идеал $f^{-1}(\mathfrak{b})$ кольца A; его иногда обозначают $\mathfrak{b} \cap A$.

Расширение идеала $\mathfrak{a}$ относительно $i : A \to S^{-1}A$ обозначают $S^{-1}\mathfrak{a}$.

1.3.5 Предложение. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A, S – мультипликативная система.*

1. $S^{-1}\mathfrak{a} = \{\frac{a}{s} | a \in \mathfrak{a}, s \in S\}$.

2. $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{a} \iff \exists s_1 \in S : s_1 a \in \mathfrak{a}$.

3. $S^{-1}\mathfrak{a} \cap A = \{a \in A | \exists s \in S : sa \in \mathfrak{a}\}$. (Этот идеал называется насыщением $\mathfrak{a}$ относительно S и обозначается $S(\mathfrak{a})$.)

4. Если $\mathfrak{b}$ – идеал в $S^{-1}A$, то $S^{-1}(\mathfrak{b} \cap A) = \mathfrak{b}$.

5. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Если $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, то $\mathfrak{p}$ насыщенный (т. е., $S(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$), и $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$. Если $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, то $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$. $\square$

Таким образом, операции расширения и сужения устанавливают биекцию между всеми идеалами в $S^{-1}A$ и насыщенными идеалами в A, причем эти операции сохраняют включения.

Далее, очевидно, что сужение простого идеала – всегда простой идеал. Следовательно, операции расширения и сужения устанавливают биекцию между $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ и $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A | \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

Есть два важнейших класса колец частных.

1. $S = A \setminus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Кольцо $S^{-1}A$ обозначают $A_\mathfrak{p}$ и называют *локализацией* A относительно простого идеала $\mathfrak{p}$.

2. Пусть $a \in A$, $S = \{1, a, a^2, \dots\}$. Кольцо $S^{-1}A$ обозначают A_a.

1.3.6 Предложение. *$A_\mathfrak{p}$ – локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.* $\square$

1.3.7 Предложение. *$A_a \simeq A[X]/(aX - 1)$.*

Д. Упражнение.

1.3.8 Предложение. *Минимальный простой идеал состоит из делителей нуля.*

Д. Пусть $\mathfrak{p}$ – минимальный простой идеал в A, тогда $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ – единственный простой идеал в $A_\mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \operatorname{Nil} A_\mathfrak{p}$.

Пусть $a \in \mathfrak{p}$, тогда $\left(\frac{a}{1}\right)^n = 0$ при некотором $n > 0$. Это значит, что при некотором $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ имеем $ta^n = 0$, т. е., $(ta^{n-1})a = 0$. Считая n минимальным, получаем, что a – делитель нуля.

Кольцо A называется *приведенным*, если $\mathrm{Nil}\, A = 0$.

1.3.8.1 Следствие. *Если A приведенное, то множество делителей нуля совпадает с объединением минимальных простых идеалов.*

Д. Нужно проверить только «$\subset$».

Пусть $ab = 0$, $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\ \text{мин.}} \mathfrak{p}$. Тогда $b \in \mathfrak{p}$ для любого минимального простого $\mathfrak{p}$, откуда $b \in \mathrm{Nil}\, A$, и $b = 0$.

1.4 Модули

Лекция 3

1.4.1 Определение. Пусть A – кольцо. *Модулем* над A (или A-модулем) называется абелева группа M вместе с «операцией умножения на скаляр»

$$A \times M \to M,$$

$$(a, m) \mapsto am,$$

для которой выполняются следующие аксиомы:
1. $(a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m$;
2. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$;
3. $(a_1 a_2)m = a_1(a_2 m)$;
4. $1m = m$

(для всех $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$).

1.4.1.1 Замечание. На любой абелевой группе есть однозначно определенная структура $\mathbb{Z}$-модуля (упражнение). Таким образом, можно не различать $\mathbb{Z}$-модули и абелевы группы.

1.4.2 Определение. N – *подмодуль* A-модуля M, если N – подгруппа M, замкнутая относительно умножения на элементы A.

На факторгруппе M/N есть очевидная структура A-модуля:

$$a(m + N) = am + N.$$

M/N с этой структурой называется *фактормодулем* M по N.

1.4.2.1 Замечание. Идеалы кольца A – это не что иное, как A-подмодули самого кольца A (с очевидной структурой A-модуля).

1.4.3 Определение. Пусть M, N – A-модули. Отображение $\varphi : M \to N$ называется *гомоморфизмом* A-модулей, если это гомоморфизм групп, и $\varphi(am) = a\varphi(m)$ для любых $a \in A$, $m \in M$. Множество всех гомоморфизмов из M в N обозначается $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. *Мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм* – это инъективный, сюръективный, биективный гомоморфизм соответственно. Если существует изоморфизм $M \to N$, говорят, что модули M и N *изоморфны* ($M \simeq N$).

Если $\varphi : M \to N$ – гомоморфизм A-модулей, $\mathrm{Ker}\, \varphi$ и $\mathrm{Im}\, \varphi$ – A-подмодули в M и N соответственно.

Если M' – подмодуль в $\operatorname{Ker}\varphi$, то φ индуцирует гомоморфизм A-модулей $M/M' \to N$. В частности, имеем изоморфизм $M/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\varphi$ («теорема о гомоморфизме для модулей»).

Последовательность модулей и гомоморфизмов

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

называется *точной*, если $\forall i : \operatorname{Im}\varphi_{i-1} = \operatorname{Ker}\varphi_i$.

Короткая точная последовательность – это точная последовательность вида

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

Пусть $\{M_i\}_{i\in I}$ – семейство A-модулей. Их *прямой суммой* называется A-модуль

$$\bigoplus_{i\in I} = \{(m_i)_{i\in I} | m_i \in M_i,\ m_i = 0 \text{ при почти всех } i \in I\}.$$

Модуль, изоморфный модулю вида $\bigoplus_{i\in I} A$, называется *свободным*.

Семейство $(m_i)_{i\in I} \subset M$ называют *системой образующих* модуля M, если в M нет собственного подмодуля, содержащего $\{m_i\}_{i\in I}$. (Пишут $M = \langle m_i | i \in I\rangle$. [4]) Это равносильно тому, что

$$M = \{\sum_{i\in I} a_i m_i | a_i \in A,\ a_i = 0 \text{ при почти всех } i \in I\}.$$

Модуль, имеющий конечную систему образующих, называют *конечно порожденным.*

1.4.4 Предложение. *M имеет систему образующих из 1 элемента, если и только если $M \simeq A/\mathfrak{a}$ для некоторого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A.*

Д. $\Leftarrow$ очевидно.

$\Rightarrow$. Если $M = \langle m\rangle$, применить теорему о гомоморфизме к

$$A \longrightarrow M,$$
$$a \longmapsto am.$$

Семейство $(m_i)_{i\in I} \subset M$ называют *базисом* модуля M, если это система образующих, и из $\sum_{i\in I} a_i m_i = 0$ следует $a_i = 0$ при всех $i \in I$.

1.4.5 Предложение. *Модуль имеет базис, если и только если он свободен.* $\square$

1.4.6 Предложение. *1. Пусть F – свободный модуль с базисом $(b_i)_{i\in I}$, M – некоторый A-модуль, $(m_i)_{i\in I}$ – семейство элементов M. Тогда существует единственный гомоморфизм $\varphi : F \to M$ такой, что $\varphi(b_i) = m_i$ для всех $i \in I$.*

2. Любой модуль изоморфен фактормодулю свободного.

3. Если M конечно порожден, то $M \simeq A^n/U$, где U – некоторый подмодуль в A^n. $\square$

[4] Вместо $\langle m_1, \ldots, m_n\rangle$ пишут также $Am_1 + \cdots + Am_n$.

1.4.7 Предложение. *1. Фактормодуль конечно порожденного модуля конечно порожден.*

2. Если M/N и N конечно порождены, то и M конечно порожден. $\square$

Если $\mathfrak{a}$ – идеал в A, запись $\mathfrak{a}M$ обозначает подмодуль

$$\Big\{\sum_{m\in M} a_m m \;\Big|\; a_m \in \mathfrak{a},\, a_m = 0 \text{ при почти всех } m \in M\Big\} \subset M.$$

1.4.8 Лемма. (Накаямы-Азумайи-Крулля) *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A, $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac} A$, M – конечно порожденный A-модуль. Тогда если $\mathfrak{a}M = M$, то $M = 0$.*

Д. Пусть $M \neq 0$. Найдутся $m_1, \ldots, m_n \in M$ такие, что $M = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle$. Будем считать n минимальным. Имеем

$$M = \mathfrak{a}M = \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \;\Big|\; a_i \in \mathfrak{a}\Big\}.$$

В частности,

$$m_1 = \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n, \quad \alpha_i \in \mathfrak{a},$$

и

$$(1-\alpha_1)m_1 = \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n, \quad \alpha_i \in \mathfrak{a}.$$

Из $\alpha_1 \in \operatorname{Jac} A$ следует $1 - \alpha_1 \in A^*$, откуда $m_1 \in \langle m_2, \ldots, m_n\rangle$, противоречие с минимальностью n.

1.5 Условия конечности

Пусть A – кольцо, M – A-модуль.

1.5.1 Предложение. *Следующие условия эквивалентны.*

1. Любая возрастающая цепочка подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M$ стабилизируется (т. е. $\exists N : M_N = M_{N+1} = \ldots$).

2. В любом непустом семействе подмодулей модуля M есть максимальный элемент.

3. Любой подмодуль модуля M конечно порожден.

Если эти условия выполнены, модуль называется *нётеровым*.

Д. 1⇒2. От противного.

2⇒1. В $(M_i)_{i\geq 0}$ есть максимальный элемент.

2⇒3. Рассмотреть семейство конечно порожденных подмодулей данного подмодуля.

3⇒1. Подмодуль $\bigcup M_i$ конечно порожден.

1.5.2 Предложение. *Следующие условия эквивалентны.*

1. Любая убывающая цепочка подмодулей стабилизируется.

2. В любом непустом семействе подмодулей модуля M есть минимальный элемент.

Если эти условия выполнены, модуль называется *артиновым*.

1.5.3 Предложение. *1. Подмодули и фактормодули нетерова (артинова) модуля – нетеровы (артиновы).*

2. Если N и M/N – нетеровы (артиновы), то и M – нетеров (артинов).

Д. «1». Очевидно.

«2». $\exists n : M_n + N = M_{n+1} + N = \dots,\ M_n \cap N = M_{n+1} \cap N = \dots$

1.5.3.1 Следствие. *Если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ — короткая точная последовательность, и M', M'' – нетеровы (артиновы), то и M – нетеров (артинов).*

1.5.3.2 Следствие. *Если M, N – нетеровы (артиновы), то и $M \oplus N$ – нетеров (артинов).*

Кольцо A называется *нетеровым* (*артиновым*), если A-модуль A нетеров (артинов). Иначе говоря, A – нетерово кольцо, если выполнены эквивалентные условия:

1. Любая возрастающая цепочка идеалов стабилизируется.
2. В любом семействе идеалов есть максимальный элемент.
3. Любой идеал конечно порожден.

Аналогично можно определить артиново кольцо.

1.5.3.3 Замечание. Со временем выяснится, что артиново кольцо – частный случай нетерова. Но до этого еще далеко.

1.5.4 Предложение. *Любой конечно порожденный модуль над нетеровым (артиновым) кольцом – нетеров (артинов).*

Д. $M \simeq A^n/U$.

1.5.5 Теорема. (Гильберта о базисе) *Если A нетерово, то $A[X]$ нетерово.*

Д. Предположим, что идеал $\mathfrak{a}$ кольца $A[X]$ не является конечно порожденным. Пусть $f_1 \in \mathfrak{a}$ – многочлен наименьшей степени. Имеем $\mathfrak{a} \setminus f_1A[X] \neq \emptyset$. Пусть $f_2 \in \mathfrak{a} \setminus f_1A[X]$ – многочлен наименьшей степени, тогда $\mathfrak{a} \setminus (f_1A[X] + f_2A[X]) \neq \emptyset$ и т. д. Получаем последовательность $f_1, f_2, \dots \in A[X]$. Выделим старшие члены:

$$f_i = a_iX^{n_i} + \dots, \quad a_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Очевидно, $n_1 \le n_2 \le \dots$

Поскольку A нетерово, при некотором r имеем

$$a_1A + \dots + a_rA = a_1A + \dots + a_{r+1}A,$$

откуда $a_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} b_ia_i$. Положим

$$g = f_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} b_if_i \cdot X^{n_{r+1}-n_i} \in \mathfrak{a}.$$

Получаем $g \notin f_1 \cdot A[X] + \dots + f_r \cdot A[X]$, $\deg g < n_{r+1}$, что противоречит выбору f_{r+1}.

1.5.5.1 Следствие. *Если A нетерово, то нетеровой является любая конечно порожденная A-алгебра, то есть любое кольцо вида $A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$.* $\square$

При доказательстве используется следующее

1.5.6 Предложение. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал, S – мультипликативная система в A. Тогда: если A нетерово (артиново), то и $A/\mathfrak{a}$, A_S нетеровы (артиновы).*

> **Д.** $A/\mathfrak{a}$ – нетеров (артинов) A-модуль $\Rightarrow$ нетеров (артинов) $A/\mathfrak{a}$-модуль. Что касается A_S, достаточно заметить, что $\mathfrak{b}_n \cap A = \mathfrak{b}_{n+1} \cap A = \ldots$

1.6 Модули конечной длины

Лекция 4

Модуль M называется *простым*, если $M \neq 0$, и в M нет нетривиальных подмодулей. *Ряд Жордана-Гёльдера* для модуля M имеет вид:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M,$$

где все фактормодули M_{i+1}/M_i простые. Если для модуля M существует ряд Жордана-Гельдера, то говорят, что M – *модуль конечной длины.*

1.6.1 Предложение. *M – модуль конечной длины $\iff$ M – нетеров и артинов.* $\square$

1.6.2 Теорема. (Жордана-Гельдера) *Пусть $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ и $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_s = M$ — два ряда Жордана-Гельдера для M. Тогда $r = s$, и модули $N_1/N_0, \ldots, N_r/N_{r-1}$ изоморфны модулям $M_1/M_0, \ldots, M_r/M_{r-1}$ с точностью до порядка.*

> **Д.** Определим обобщенный ряд Ж.-Г.: вместо простоты M_{i+1}/M_i потребуем, что M_{i+1}/M_i был простым или тривиальным. Два обобщенных ряда Ж.-Г. назовем эквивалентными, если их нетривиальные факторы совпадают с точностью до изоморфизма и до порядка. Достаточно доказать, что любые 2 обобщенных ряда Ж.-Г. эквивалентны.
>
> Пусть
>
> $$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$
> $$0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_s = M$$
>
> – два обобщенных ряда Ж.-Г. Положим $P_{ij} = M_i \cap N_j$.
>
> Заметим, что ряд
>
> $$P_{00} \subset P_{01} \subset \cdots \subset P_{0s} \subset P_{1s} \subset \cdots \subset P_{rs}$$
>
> эквивалентен (M_i), а ряд
>
> $$P_{00} \subset P_{10} \subset \cdots \subset P_{r0} \subset P_{r1} \subset \cdots \subset P_{rs}$$
>
> эквивалентен (N_j). Таким образом, достаточно доказать эквивалентность всех рядов, получающихся «ходом ладьи» в прямоугольной диаграмме включений подмодулей P_{ij}, то есть эквивалентность всех рядов вида
>
> $$P_{00} \subset \cdots \subset P_{ij} \subset P_{i'j'} \subset \cdots \subset P_{rs}.$$

где либо $i' = i, j' = j+1$, либо $i' = i+1, j' = j$. (Заметим, что любой ряд такого вида – действительно обобщенный ряд Ж.-Г., т.к., например, $P_{i,j+1}/P_{ij} = M_i \cap N_{j+1}/M_i \cap N_j$ изоморфен подмодулю в N_{j+1}/N_j.)

Достаточно доказать, что ряд вида

$$\dots \subset P_{ij} \subset P_{i+1,j} \subset P_{i+1,j+1} \subset \dots$$

эквивалентен

$$\dots \subset P_{ij} \subset P_{i,j+1} \subset P_{i+1,j+1} \subset \dots$$

1 случай, когда $Q := P_{i+1,j+1}/P_{ij} = 0$ очевиден.

2 случай: Q простой. Тогда $\{P_{i+1,j}/P_{ij}, P_{i+1,j+1}/P_{i+1,j}\}$ состоит из 0 и Q, и то же можно сказать о $\{P_{i,j+1}/P_{ij}, P_{i+1,j+1}/P_{i,j+1}\}$.

3 случай: Q отличен от 0 и не простой. Легко построить мономорфизм

$$P_{i,j+1}/P_{ij} \hookrightarrow P_{i+1,j+1}/P_{i+1,j}.$$

Здесь второй фактормодуль прост, а первый отличен от нуля. Следовательно, это изоморфизм. Аналогично $P_{i+1,j}/P_{ij} \simeq P_{i+1,j+1}/P_{i,j+1}$.

Если $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M$ – ряд Жордана-Гельдера для M, то r называют *длиной* M. Мы будем писать $r = l(M)$.

1.6.3 Предложение. *В короткой точной последовательности*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

M имеет конечную длину, если и только если M' и M'' имеют конечную длину. При этом $l(M) = l(M') + l(M'')$. $\square$

1.6.3.1 Следствие. *Пусть M – модуль конечной длины, $0 = P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq P_r = M$ – цепочка подмодулей. Тогда ее можно уплотнить до ряда Жордана-Гельдера.*

Д. Упражнение.

1.6.4 Предложение. *Пусть M – векторное пространство над некоторым полем. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\dim M < \infty$.

2. M нетерово.

3. M артиново.

4. $l(M) < \infty$.

Д. Легко видеть, что 4⇒2, 4⇒3, 1⇒2, 1⇒3, 2⇒1, 2&3⇒4. Чтобы проверить, что 3⇒1, надо из бесконечного базиса удалять последовательно по одному элементу.

Ясно, что в условиях предложения $l(M) = \dim M$. Таким образом, длина – это в некотором смысле обобщение размерности.

1.7 Тензорные произведения модулей

Пусть M, N, P – A-модули. Отображение $f : M \times N \to P$ называется *билинейным*, если при любом фиксированном $n \in N$ отображение $f(\cdot, n) : M \to P$ – гомоморфизм A-модулей, а при любом фиксированном $m \in M$ отображение $f(m, \cdot) : N \to P$ – также гомоморфизм A-модулей.

Тензорным произведением A-модулей M и N называется пара, состоящая из A-модуля $M \otimes_A N$ и A-билинейного отображения $h : M \times N \to M \otimes_A N$ такого, что для любого модуля P и любого A-билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственный гомоморфизм A-модулей $\tilde{f} : M \otimes_A N \to P$ такой, что $f = \tilde{f} \circ h$.

1.7.1 Предложение. *Тензорное произведение M и N существует и единственно с точностью до изоморфизма.*

Д. Единственность проверяется легко. (На самом деле это частный случай единственности начального объекта в любой категории.)

Существование. Пусть F – свободный модуль с базисом $\{X_{m,n} | m \in M, n \in N\}$. Обозначим через R подмодуль, порожденный всеми элементами вида $X_{m,n_1+n_2} - X_{m,n_1} - X_{m,n_2}$, $X_{m_1+m_2,n} - X_{m_1,n} - X_{m_2,n}$, $X_{m,an} - aX_{m,n}$, $X_{am,n} - aX_{m,n}$, где $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $a \in A$, и положим $M \otimes_A N := F/R$. Определим билинейное отображение

$$\begin{aligned} h : M \times N &\to M \otimes_A N \\ (m, n) &\mapsto X_{m,n} + R \end{aligned}$$

Легко проверить, что $(M \otimes_A N, h)$ – тензорное произведение M и N.

Обычно билинейное отображение $M \times N \to M \otimes_A N$ не обозначают какой-либо буквой; вместо этого образ (m, n) обозначают $m \otimes n$.

1.7.1.1 Замечание. Все свойства тензорного произведения проверяются, исходя из его определения, а не из явной конструкции.

1.7.2 Предложение. *1. $\{m \otimes n | m \in M, n \in N\}$ – система образующих $M \otimes N$.*

2. Существует канонический изоморфизм

$$M \otimes_A N \tilde{\to} N \otimes_A M.$$

3. Существует канонический изоморфизм $(M \otimes_A N) \otimes_A P \tilde{\to} M \otimes_A (N \otimes_A P)$.

4. Существует канонический изоморфизм $A \otimes_A M \tilde{\to} M$.

5. Существует канонический изоморфизм

$$\Big(\bigoplus_{i \in I} M_i\Big) \otimes_A N \tilde{\to} \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes_A N.$$

6. Если M – свободный модуль с базисом $(m_i)_{i \in I}$, N – свободный модуль с базисом $(n_j)_{j \in J}$, то $M \otimes_A N$ – свободный модуль с базисом $(m_i \otimes n_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

Д. 1. Достаточно заметить, что подмодуль, порожденный всеми $m\otimes n$, вместе с очевидным билинейным отображением, является тензорным произведением M и N.

2. Рассмотрим билинейное отображение

$$M\times N \to N\otimes_A M,$$

$$(m,n)\mapsto\ n\otimes m.$$

Оно пропускается через $M\otimes_A N$, что дает гомоморфизм A-модулей

$$M\otimes_A N\to N\otimes_A M,$$

$$m\otimes n\ \mapsto\ n\otimes m.$$

Аналогично строится гомоморфизм $N\otimes_A M\to M\otimes_A N$. Композиция этих двух гомоморфизмов тождественна на элементах вида[5] $m\otimes n$. В силу пункта 1, каждая из двух композиций является тождественным отображением[6].

Доказательство пунктов 3,4,5 основано на той же идее. (Упражнение.)

Пункт 6 вытекает из пункта 5.

Пусть $M\stackrel{\varphi}{\to}M'$, $N\stackrel{\psi}{\to}N'$ – гомоморфизмы A-модулей. Тогда отображение

$$M\times N\to\ M'\otimes_A N',$$

$$(m,n)\mapsto\varphi(m)\otimes\psi(n).$$

билинейно и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$M\otimes_A N\ \xrightarrow{\varphi\otimes\psi}\ M'\otimes_A N',$$

$$m\otimes n\quad\mapsto\quad\varphi(m)\otimes\psi(n).$$

Говорят, что на B задана структура A-*алгебры*, если на B есть одновременно структура A-модуля и структура кольца, причем умножение в кольце B является A-билинейным отображением.

Пусть A – кольцо, B – A-алгебра, M – A-модуль. Тогда на $B\otimes_A M$ вводится структура B-модуля:

$$b'\cdot(b\otimes m)=b'b\otimes m.$$

Для строгого определения нужно зафиксировать $b'\in B$ и рассмотреть

$$B\times M\to B\otimes_A M,$$

$$(b,m)\mapsto b'b\otimes m.$$

Это отображение A-билинейно и определяет гомоморфизм A-модулей

$$B\otimes_A M\to B\otimes_A M,$$

$$b\otimes m\ \mapsto b'b\otimes m.$$

Это и будет умножение на b'.

1.8 Модули частных

Лекция 5

Пусть S – мультипликативная система в A, M – A-модуль. В $S \times M$ введем отношение $\sim$:

$$(s,m) \sim (s',m') \iff \exists t \in S : tsm' = ts'm.$$

Легко видеть, что это отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности будет обозначаться через $S^{-1}M$, а класс пары (s,m) – через $\frac{m}{s}$.

Положим

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{s_2 m_1 + s_1 m_2}{s_1 s_2},$$
$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}.$$

1.8.1 Предложение. *Операции определены корректно и превращают $S^{-1}M$ в $S^{-1}A$-модуль (его обозначают также M_S).* □

Если $S = A \setminus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, модуль $S^{-1}M$ обозначают $M_{\mathfrak{p}}$.

Гомоморфизм A-модулей $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ индуцирует гомоморфизм $S^{-1}A$-модулей

$$\begin{aligned} f_S : S^{-1}M_1 &\to S^{-1}M_2, \\ \tfrac{m}{s} &\mapsto \tfrac{f(m)}{s}. \end{aligned}$$

Получили функтор из категории A-модулей в категорию $S^{-1}A$-модулей (функтор *локализации*).

1.8.2 Предложение. *Функтор локализации точен, то есть переводит точную последовательность в точную последовательность.*

Д. Рассмотрим фрагмент точной последовательности

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2.$$

Из $g_S \circ f_S = (g \circ f)_S = 0$ следует $\operatorname{Im} f_S \subset \operatorname{Ker} g_S$.

Обратно, пусть $\frac{m}{s} \in \operatorname{Ker} g_S$, тогда $\frac{g(m)}{s} = 0$, и существует $t \in S$ такой, что $tg(m) = 0$. Имеем $tm \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, т. е. $\exists m_1 \in M_1 : tm = f(m_1)$. Получаем

$$\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = f_S\left(\frac{m_1}{ts}\right).$$

1.8.3 Предложение. *Для любого A-модуля имеется канонический изоморфизм $M_S \simeq A_S \otimes_A M$.*

---

[5] Такие элементы иногда называют *разложимыми тензорами.*

[6] Вместо пункта 1 можно использовать единственность гомоморфизма в определении тензорного произведения.

Д. Построим явно два гомоморфизма.

Гомоморфизм $A_S \otimes_A M \to M_S$ определяется A-билинейным отображением

$$A_S \times M \to M_S,$$
$$\left(\tfrac{a}{s}, m\right) \mapsto \tfrac{a}{s} \cdot \tfrac{m}{1}.$$

Далее, определим

$$M_S \to A_S \otimes_A M,$$
$$\tfrac{m}{s} \mapsto \tfrac{1}{s} \otimes m.$$

Это определение нуждается в проверке корректности. Пусть $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$. Тогда $\exists t \in S : t(s'm - sm') = 0$, откуда

$$\frac{1}{ss't} \otimes ts'm = \frac{1}{ss't} \otimes tsm'.$$

Непосредственно проверяется, что обе композиции этих гомоморфизмов – тождественные отображения.

1.9 Ассоциированные простые идеалы и носитель

Пусть M – A-модуль. *Аннулятором* M называется

$$\mathrm{Ann}_A(M) = \{a \in A | \forall m \in M : am = 0\}.$$

Аннулятором элемента $m \in M$ называется

$$\mathrm{Ann}_A(m) = \{a \in A | am = 0\}.$$

Очевидно, $\mathrm{Ann}_A(M)$ и $\mathrm{Ann}_A(m)$ – идеалы в A.

Множество простых идеалов, *ассоциированных* с M определяется как

$$\mathrm{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A | \exists m \in M : \mathrm{Ann}_A(m) = \mathfrak{p}\}.$$

(Индекс «A» будем всюду опускать, если ясно, о каком кольце речь.)

1.9.1 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$. *Тогда* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, *если и только если в* M *существует подмодуль, изоморфный* $A/\mathfrak{p}$.

Д. Если $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$, то $\langle m \rangle \simeq A/\mathfrak{p}$. Обратно, если $x \in A/\mathfrak{p}$, $x \neq 0$, то $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$.

1.9.2 Предложение. *Максимальные элементы* $\{\mathrm{Ann}(m) | m \in M \setminus \{0\}\}$ *суть простые идеалы. (В частности, если* A *нетерово, то* $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ *при* $M \neq 0$.*)*

Д. Пусть $\mathfrak{p}$ – максимальный элемент среди $\mathrm{Ann}(m)$. Пусть $ab \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$, т. е., $bm \neq 0$. Рассмотрим $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(bm) \supset \mathfrak{p}$. Из максимальности $\mathfrak{p}$ следует $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Наконец, $a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{p}$.

1.9.3 Лемма. *Если*

$$0 \to M_1 \to M \overset{p}{\to} M_2$$

– точная последовательность, то

$$\mathrm{Ass}(M_1) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M_2).$$

Д. Первое включение очевидно. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; тогда $M \supset N \simeq A/\mathfrak{p}$.

1 случай: $N \cap M_1 = 0$. Тогда $p : N \overset{\sim}{\to} p(N)$, откуда $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M_2)$.

2 случай: $N \cap M_1 \neq 0$. Пусть $x \in N \cap M_1$, $x \neq 0$. Тогда, как мы видели при доказательстве леммы 1.9.1, $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M_1)$.

1.9.3.1 Следствие. $\mathrm{Ass}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M_2)$. □

1.9.4 Предложение. *Пусть A нетерово, S – мультипликативная система, M – A-модуль. Тогда*

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} | \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M, \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Д. «$\supset$». Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(m)$, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Положим $\mathfrak{q} := \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(\frac{m}{1})$. Тогда $\mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{p}$.

«$\subset$». Пусть $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(\frac{m}{s})$. Тогда $\exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A : \mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. В силу нетеровости, $\mathfrak{p} = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle$. Из $\frac{p_i}{1} \cdot \frac{m}{s} = 0$ следует $t_i p_i m = 0$, $t_i \in S$. Отсюда получаем $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ann}_A(tm)$, где $t = \prod t_i$. Обратно, если $a \in \mathrm{Ann}_A(tm)$, то $\frac{a}{1} \in \mathfrak{q}$ и $a \in \mathfrak{p}$.

Лекция 6

Носителем A-модуля M называется множество

$$\mathrm{Supp}\, M = \mathrm{Supp}_A\, M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A | M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

1.9.5 Лемма. *Если есть короткая точная последовательность*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

то $\mathrm{Supp}\, M = \mathrm{Supp}\, M' \cup \mathrm{Supp}\, M''$.

Д. Локализация – точный функтор.

1.9.6 Лемма. *Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, M – A-модуль. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$.

2. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$ *при некотором* N.

3. $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, M$.

Д. 3$\Rightarrow$2$\Rightarrow$1 легко проверяется без всякой нетеровости: 3$\Rightarrow$2 следует из Леммы 1.9.1, а 2$\Rightarrow$1 – из Лемм 1.9.1 и 1.9.5.

1$\Rightarrow$3. Из $M_\mathfrak{p} \neq 0$ следует $\mathrm{Ass}\, M_\mathfrak{p} \neq 0$. Пусть $\tilde{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Ass}\, M_\mathfrak{p}$. Из Предложения 1.9.4 следует $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} A_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, M$.

Пусть X – подмножество в A. Будем использовать обозначение

$$V(X) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A | X \subset \mathfrak{p}\}.$$

1.9.7 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ *– идеалы. Тогда* $V(\bigcap \mathfrak{a}_i) = \bigcup V(\mathfrak{a}_i)$.

Д. Пусть $\mathfrak{p} \in V(\bigcap \mathfrak{a}_i)$. Если $x_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{p}$, $i = 1, \dots, n$, то $x = \prod x_i \in \bigcap \mathfrak{a}_i$, $x \notin \mathfrak{p}$.

1.9.8 Предложение. *Если* M *конечно порожденный, то* $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann} M)$.

Д. «$\subset$» следует из определения локализации и не требует конечной порожденности.

«$\supset$». Пусть $m_1, \dots, m_k$ – образующие M. Имеем по лемме 1.9.7

$$V(\operatorname{Ann} M) = V(\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ann} m_i) = \bigcup_{i=1}^{k} V(\operatorname{Ann} m_i),$$

Следовательно, если $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann} M)$, при некотором i имеем $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann} m_i$, откуда

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{p}) \subset \operatorname{Supp}(A/\operatorname{Ann} m_i) = \operatorname{Supp}\langle m_i \rangle \subset \operatorname{Supp} M.$$

1.9.9 Предложение. *1. Пусть* A *нетерово,* M *– конечно порожденный* A*-модуль. Тогда существует цепочка подмодулей*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

такая, что $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$, $i = 1, \dots, n$.

2. При этом $\operatorname{Ass} M \subset \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} \subset \operatorname{Supp} M$.

3. Минимальные элементы в этих трех множествах совпадают. При этом любой элемент $\operatorname{Supp} M$ *содержит какой-либо из минимальных элементов* $\operatorname{Supp} M$.

Д. 1. Пусть N – максимальный подмодуль в M, для которого существует цепочка подмодулей с требуемым свойством. Предположим, что $M \neq N$. Тогда $\operatorname{Ass}(M/N) \neq \emptyset$, откуда найдется подмодуль N' в M такой, что $N' \supset N$ и $N'/N \simeq A/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Тогда для N' также есть цепочка с требуемым свойством, противоречие с максимальностью N.

2. Из точных последовательностей

$$0 \to M_{n-1} \to M_n \to M_n/M_{n-1} \to 0,$$
$$0 \to M_{n-2} \to M_{n-1} \to M_{n-1}/M_{n-2} \to 0$$

и т. д. имеем

$$\operatorname{Supp} M = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Supp}(M_i/M_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{p}_i) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{p}_i),$$
$$\operatorname{Ass} M \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Ass}(M_i/M_{i-1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Ass}(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_n\}.$$

3. Пусть $\mathfrak{p}$ – минимальный в $\operatorname{Supp} M$. Из $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ следует $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$, откуда $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Если $\mathfrak{p}$ – минимальный в $\operatorname{Ass} M$ или в $\{\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_n\}$, то $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. Если $\mathfrak{p} \supsetneq \mathfrak{p}' \in \operatorname{Supp} M$, то $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} M$, противоречие.

1.9.9.1 Замечание. Набор $P = \{\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_n\}$ не является единственным. Например, пусть $A = M = \mathbb{Z}$. Тогда вот две цепочки, удовлетворяющие условиям Предложения: $0 \subset \mathbb{Z}$ и $0 \subset 6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. В первом случае $P = \{0\}$, во втором $P = \{0, (2), (3)\}$.

1.9.9.2 Следствие. *Если M – конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом, $\operatorname{Ass} M$ конечно.* $\square$

1.9.9.3 Следствие. *В нетеровом кольце имеется конечное число минимальных простых идеалов.*

Д. Имеем $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Supp}_A A$. Поэтому минимальные элементы $\operatorname{Spec} A$ – это минимальные элементы $\operatorname{Ass} A$.

1.10 Артиновы кольца

Пусть A – кольцо. *Размерностью*[7] A ($\dim A$) называется верхняя грань таких n, что существует возрастающая цепочка простых идеалов $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$.

1.10.1 Теорема. *Пусть A – кольцо. Следующие 3 условия эквивалентны.*
1. *A нетерово, и $\dim A = 0$.*
2. *Любой конечно порожденный A-модуль имеет конечную длину.*
3. *A артиново.*

Доказательство 1⇒2⇒3.

1⇒2. Пусть M – конечно порожденный A-модуль. Имеем

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M, \quad M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A.$$

Поскольку $\dim A = 0$, все $\mathfrak{p}_i$ максимальны, $l(M_i/M_{i-1}) = l(A/\mathfrak{p}_i) = 1$, и $l(M) < \infty$.

2⇒3 тривиально.

Для доказательства оставшейся импликации необходимы 4 леммы.

1.10.2 Лемма. *Пусть A – кольцо, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ – некоторые максимальные идеалы A, не обязательно различные. Предположим, $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n = 0$. Тогда: A нетерово, если и только если A артиново.*

Д. Рассмотрим цепочку

$$0 = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{n-1} \subset \dots \subset \mathfrak{m}_1 \subset A.$$

Нетеровость (соответственно артиновость) A равносильна тому, что модуль $V_i = (\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i)/(\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i+1})$ нетеров (артинов) при $i = 1, \dots, n-1$. Поскольку V_i аннулируется идеалом $\mathfrak{m}_{i+1}$, на V_i есть структура линейного пространства над полем $A/\mathfrak{m}_{i+1}$, причем подмодули V_i – это в точности линейные подпространства. Осталось заметить, что для векторного пространства нетеровость равносильна артиновости.

[7] говорят еще: размерность Крулля

1.10.3 Лемма. *Если A артиново, то* $\dim A = 0$.

Д. Если $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, то $A/\mathfrak{p}$ – артинова область целостности. Осталось доказать, что артинова область целостности является полем.

Пусть $x \neq 0$, рассмотрим цепочку идеалов

$$\langle x \rangle \supset \langle x^2 \rangle \supset \cdots \supset \langle x^n \rangle \supset \ldots$$

Из артиновости $\langle x^n \rangle = \langle x^{n+1} \rangle$ при некотором n. Следовательно, найдется y такой, что $x^n = yx^{n+1}$. Поскольку мы в области целостности, получаем $xy = 1$, т. е. x обратим.

1.10.4 Лемма. *В артиновом кольце есть конечное число простых идеалов.*

Д. В семействе идеалов, которые можно представить в виде $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ ($\mathfrak{m}_i$ – простые), есть минимальный элемент. Тогда любой $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A$ содержит этот $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$. По лемме 1.9.7, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_i$ при некотором i, откуда $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$ по лемме 1.10.3.

1.10.5 Лемма. *В артиновом кольце нильрадикал нильпотентен*[8].

Д. Пусть $\mathfrak{n} = \operatorname{Nil} A$. Имеем

$$\mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}^k = \mathfrak{n}^{k+1} =: \mathfrak{a}.$$

Предположим, $\mathfrak{a} \neq 0$. Рассмотрим семейство P идеалов $\mathfrak{q}$ таких, что $\mathfrak{a}\mathfrak{q} \neq 0$. Оно непусто, так как $\mathfrak{n} \in P$.

Пусть $\mathfrak{q}_0$ – минимальный элемент в P. Из $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_0 \neq 0$ следует, что $\mathfrak{a}x \neq 0$ при некотором $x \in \mathfrak{q}_0$, откуда $\mathfrak{q}_0 = \langle x \rangle$.

Поскольку $\mathfrak{a}\mathfrak{n}\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{a}\mathfrak{q}_0 \neq 0$, имеем $\mathfrak{n}\mathfrak{q}_0 \in P$ и $\mathfrak{n}\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{n}x$. Отсюда $x = ax$ при некотором $a \in \mathfrak{n}$. Домножая многократно на a, получаем $x = 0$, противоречие.

Окончание доказательства теоремы.

Пусть A артиново. Мы уже доказали, что $\dim A = 0$, и осталось доказать, что A нетерово. Ввиду леммы 1.10.4 можно написать

$$\operatorname{Nil} A = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k \supset \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_k.$$

По лемме 1.10.5, $(\operatorname{Nil} A)^N = 0$ при некотором N, откуда $\mathfrak{m}_1^N \ldots \mathfrak{m}_n^N = 0$, и по лемме 1.10.2 A нетерово.

Лекция 7

1.10.6 Теорема. *Любое артиново кольцо раскладывается в прямое произведение локальных артиновых колец.*

Д. Пусть $\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$. Имеем $\operatorname{Nil} A = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ и $\exists N$: $(\operatorname{Nil} A)^N = 0$. Из взаимной простоты $\mathfrak{m}_i$ и $\mathfrak{m}_j$ следует взаимная простота $\mathfrak{m}_i^N$ и $\mathfrak{m}_j^N$:

$$1 = x + y \implies 1 = (x+y)^{2N} \in \mathfrak{m}_i^N + \mathfrak{m}_j^N.$$

[8]то есть какая-то его степень равна нулю

По лемме 1.1.7 получаем

$$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n,$$
$$\mathfrak{m}_1^N \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n^N = \mathfrak{m}_1^N \dots \mathfrak{m}_n^N.$$

Все это вместе дает $\mathfrak{m}_1^N \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n^N = 0$. По китайской теореме об остатках

$$A \simeq \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{m}_i^N.$$

Поскольку $\mathfrak{m}_i^N$ содержится в единственном элементе $\operatorname{Spec} A$, в $A/\mathfrak{m}_i^N$ есть единственный простой идеал $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^N$.

1.10.6.1 Следствие. *Артиново кольцо без нильпотентов изоморфно прямому произведению полей.* □

1.11 Целые расширения колец

Пусть A – подкольцо кольца B. Говорят, что $x \in B$ *цел* над A, если x удовлетворяет уравнению

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in A.$$

Это уравнение называют *уравнением целой зависимости* для x.

A-модуль M называют *точным*, если $\operatorname{Ann} M = 0$. Если x – элемент любого надкольца B кольца A, то через $A[x]$ обозначается наименьшее подкольцо в B, содержащее A и x. (Как A-подмодуль в B, $A[x]$ порождается элементами $1, x, x^2, \dots$) Далее, $A[x_1, \dots, x_n] := A[x_1] \dots [x_n]$.

1.11.1 Лемма. *Следующие условия эквивалентны.*

1. x цел над A.

2. Подкольцо $A[x]$ кольца B конечно порождено как A-модуль.

3. Существует подкольцо $C \supset A[x]$, являющееся конечно порожденным A-модулем.

4. Существует точный $A[x]$-модуль M, который конечно порожден как A-модуль.

Д. 1⇒2. Из $x^n = -a_1 x^{n-1} - \cdots - a_n$ следует $A[x] = A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$.

2⇒3⇒4 тривиально.

4⇒1. Пусть $M = Am_1 + \cdots + Am_n$. Имеем

$$x m_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j.$$

Пусть E_n – единичная матрица порядка n, и

$$S = (a_{ij})_{i,j} - xE_n \in M_n(A[x]).$$

Пусть $\tilde{S}$ – присоединенная матрица[9]. Тогда

$$0 = \tilde{S} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = (\det S) \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix},$$

[9] то есть матрица, составленная из алгебраических дополнений

откуда, ввиду точности модуля M, $\det S = 0$. Это и есть уравнение целой зависимости для x.

Пусть $A \subset B$ – кольца. Говорят, что

– B *цело* над A (или: $A \subset B$ – *целое расширение*), если любой элемент B цел над A;

– B *конечно* над A, если B – конечно порожденный A-модуль;

– B *конечного типа* над A, если B – конечно порожденная A-алгебра[10], т. е. $B = A[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in B$.

1.11.2 Лемма. *Если B конечно над A, C конечно над B, то C конечно над A.* □

1.11.2.1 Следствие. *Если $x_1, \dots, x_n$ целы над A, то $A[x_1, \dots, x_n]$ конечно над A.* □

1.11.2.2 Следствие. *Пусть $A \subset B$. Элементы B, целые над A, образуют подкольцо*[11].

Д. $A[x, y]$ содержит $x + y$, xy и конечно над A. Следовательно, $x + y$ и xy целые.

A *целозамкнуто в* B, если оно совпадает со своим целым замыканием в B. Область целостности называется *целозамкнутой*, если она целозамкнута в своем поле частных.

1.11.3 Предложение. *Пусть B цело над A, $c \in C \supset B$ цел над B. Тогда c цел над A.*

Д. Имеем $c^n + b_1 c^{n-1} + \dots + b_n = 0$, $b_i \in B$, откуда ясно, что c цел над $A[b_1, \dots, b_n]$. Поскольку $A[b_1, \dots, b_n, c]$ конечно над $A[b_1, \dots, b_n]$, а это кольцо конечно над A, получаем, что $A[b_1, \dots, b_n, c]$ конечно над A.

1.11.3.1 Следствие. *Целое замыкание A в B целозамкнуто в B.*

1.11.4 Предложение. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение.*

1. Если $\mathfrak{b}$ – идеал в B, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap A$, то $B/\mathfrak{b}$ цело над $A/\mathfrak{a}$.

2. Пусть S – мультипликативная система в A. Тогда $S^{-1}B$ цело над $S^{-1}A$.

Д. Чтобы проверить, что $\frac{b}{s}$ целый, надо $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n$ разделить на s^n.

1.11.4.1 Замечание. Всегда, когда A – подкольцо в B, а S – мультипликативная система в A, $S^{-1}A$ можно отождествить с подкольцом в $S^{-1}B$. Действительно, композиция $A \to B \to S^{-1}B$ переводит элементы S в обратимые, и потому есть канонический гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A & \to & S^{-1}B, \\ \frac{a}{s} & \mapsto & \frac{a}{s}; \end{array}$$

легко видеть, что он инъективен.

[10] Конечно порожденные алгебры уже упоминались в следствии из теоремы Гильберта о базисе (1.5.5); очевидно, речь идет о том же самом понятии. Только здесь речь идет об алгебрах, являющихся надкольцами кольца A, а в общем случае надо использовать определение из 1.5.5. Либо можно определить конечно порожденную A-алгебру как конечно порожденное надкольцо факторкольца кольца A – результат будет тот же самый.

[11] Это так называемое *целое замыкание* A в B.

1.11.5 Лемма. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение, A и B – области. Тогда: A – поле $\iff$ B – поле.*

Д. $\Rightarrow$. Рассмотрим $b \in B$, $b \neq 0$. Пусть $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$ – уравнение целой зависимости наименьшей степени. Тогда $a_n \neq 0$ и $b(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \dots + a_{n-1})(-a_n^{-1}) = 1$.

$\Leftarrow$. Рассмотрим $a \in A$, $a \neq 0$. Тогда для $a^{-1} \in B$ есть уравнение целой зависимости $(a^{-1})^n + a_1(a^{-1})^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Домножив его на a^{n-1}, получим $a^{-1} \in A$.

1.11.5.1 Следствие. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Тогда $\mathfrak{q}$ максимальный $\iff$ $\mathfrak{p}$ максимальный.* $\square$

1.11.6 Предложение. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение, $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$. Предположим, что $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$. Тогда $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*

Д. Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \cap A$. Рассмотрим целое расширение $A_\mathfrak{p} \subset B_\mathfrak{p}$. Для $\mathfrak{q}_1 B_\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2 B_\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ имеем

$$\mathfrak{q}_1 B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_2 B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} A_\mathfrak{p}.$$

Поскольку $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} A_\mathfrak{p}$, по предыдущему следствию $\mathfrak{q}_1 B_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max} B_\mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{q}_1 B_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_2 B_\mathfrak{p}$. Наконец,

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1 B_\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}_2 B_\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}_2.$$

1.11.7 Предложение. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Тогда найдется $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ такой, что $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Д. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, hook] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Легко видеть, что $B_\mathfrak{p} \neq 0$. Выберем в $B_\mathfrak{p}$ произвольный максимальный идеал $\mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{m} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$, поскольку сужение максимального идеала должно быть максимальным идеалом. Далее, $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \cap B$ – искомый.

1.11.8 Теорема. (Коэна–Зайденберга о подъеме) *Пусть $A \subset B$ – целое расширение, $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$ – простые в A, $\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q}_0 \cap B = \mathfrak{p}_0$. Тогда можно найти цепочку $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_n$ простых в B такую, что $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.*

Д. Достаточно построить $\mathfrak{q}_1$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\mathfrak{p}_0 \arrow[r, hook] & B/\mathfrak{q}_0 \end{tikzcd}$$

Поскольку $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}_0$, по предыдущему предложению над ним лежит $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}_0$. Запишем $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_0$, тогда $\mathfrak{q}_1$ – искомый.

1.11.8.1 Следствие. *Пусть $A \subset B$ – целое расширение. Тогда* $\dim A = \dim B$.

Д. Из теоремы о подъеме $\dim B \geq \dim A$. Обратно, пусть $\mathfrak{q}_0 \subsetneqq \mathfrak{q}_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{q}_n$ – простые в B. Положим $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$. Ввиду Предложения 1.11.6 получаем $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ и $\dim A \geq \dim B$.

1.12 Целые расширения нормальных колец

Лекция 8

1.12.1 Предложение. *Пусть A целозамкнуто в B, S – мультипликативная система в A. Тогда $S^{-1}A$ целозамкнуто в $S^{-1}B$.*

Д. Пусть $\frac{b}{s}$ цел над $S^{-1}A$, $b \in B$; $s \in S$. Имеем

$$\Big(\frac{b}{s}\Big)^n + \alpha_1\Big(\frac{b}{s}\Big)^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0, \quad \alpha_i \in S^{-1}A,$$

откуда $b^n + \alpha_1 s b^{n-1} + \dots + \alpha_n s^n = 0$. Пусть $\alpha_i s^i = \frac{a_i}{t_i}$, $a_i \in A$, $t_i \in S$; положим $T = t_1 \dots t_n$. Получаем

$$\frac{Tb^n + a_1' b^{n-1} + \dots + a_n'}{T}, \quad a_i' \in A,$$

и $s'(Tb^n + a_1'b^{n-1} + \dots + a_n') = 0$ при некотором $s' \in S$. Домножив еще на $(s'T)^{n-1}$, получаем, что $s'Tb$ цел над A, откуда $s'Tb \in A$ и $\frac{b}{s} \in S^{-1}A$.

1.12.1.1 Следствие. *Пусть A – целозамкнутая область целостности, S – мультипликативная система, лежащая в $A \setminus \{0\}$. Тогда $S^{-1}A$ – целозамкнутая область целостности.*

Кольцо A называется *нормальным*, если для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ – целозамкнутая область целостности.

1.12.2 Предложение. *Пусть A – нетерово кольцо. Тогда: A нормально, если и только если $A = A_1 \times \dots \times A_r$, где A_i – целозамкнутые области.*

Сперва докажем три леммы.

1.12.3 Лемма. *Пусть A – область с полем частных K. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ можно рассматривать как подкольцо в K. Тогда*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} A_{\mathfrak{m}}.$$

Д. «$\subset$» очевидно.

«$\supset$». Пусть $x \in \bigcap A_{\mathfrak{m}}$. Положим $\mathfrak{a} = \{a \in A | ax \in A\}$. Тогда $\mathfrak{a}$ – идеал в A и из $x \in A_{\mathfrak{m}}$ следует $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{m}$ для любого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Следовательно, $\mathfrak{a} = A$.

1.12.4 Лемма. *Пусть $A = A_1 \times \dots \times A_r$. Тогда $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, если и только если*

$$\mathfrak{p} = A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times \mathfrak{q} \times A_{i+1} \times \dots \times A_r, \quad \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A_i.$$

При этом $A_{\mathfrak{p}} \simeq (A_i)_{\mathfrak{q}}$.

Д. Упражнение.

1.12.5 Лемма. *Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ – все минимальные простые в A. Предположим, что $A_\mathfrak{p}$ – область целостности для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Тогда $A \simeq (A/\mathfrak{p}_1) \times \cdots \times (A/\mathfrak{p}_r)$.*

Д. 1. Имеем

$$\{0\} = \operatorname{Ass}_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} | \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_A A,\ \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}.$$

Отсюда $\operatorname{Ass}_A A = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$.

2. Имеем $\operatorname{Nil} A = 0$. (Действительно, если $n \in \operatorname{Nil} A$, $n \neq 0$, то $\operatorname{Ann} n$ должен содержаться в одном из элементов $\operatorname{Ass}_A A$, т. е. в одном из $\mathfrak{p}_i$. Но в области $A_{\mathfrak{p}_i}$ должно быть $\frac{n}{1} = 0$, откуда $\operatorname{Ann} n \not\subset \mathfrak{p}_i$.)

3. Имеем $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = A$. (В противном случае $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$ содержалась бы в каком-то максимальном идеале $\mathfrak{m}$, и в $A_\mathfrak{m}$ было бы по крайней мере два минимальных простых.) Осталось применить китайскую теорему об остатках.

Доказательство предложения

$\Leftarrow$. Пусть $\mathfrak{p}$ – как в Лемме 1.12.4. Тогда $A_\mathfrak{p} = (A_i)_\mathfrak{q}$ – целозамкнутая область по Следствию 1.12.1.1.

$\Rightarrow$. Ввиду Лемм 1.12.4 и 1.12.5 все сводится к случаю, когда A – область. Пусть K – ее поле частных. Пусть $x \in K$, x цел над A. Имеем $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : x \in A_\mathfrak{p}$, поскольку $A_\mathfrak{p}$ целозамкнуто. Тогда $x \in A$ по Лемме 1.12.3.

1.12.6 Предложение. *Пусть A – целозамкнутая область целостности, K – ее поле частных, L/K – алгебраическое расширение, $x \in L$. Тогда следующие условия равносильны.*

1. *x цел над A.*
2. *Коэффициенты минимального многочлена x лежат в A.*
3. *Коэффициенты характеристического многочлена x лежат в A.*

Д. 2$\Rightarrow$1, 3$\Rightarrow$1 из определения целой зависимости.

1$\Rightarrow$2. Пусть f – унитарный[12] минимальный многочлен x, а $h(x) = 0$ – уравнение целой зависимости для x ($h \in A[X]$, h унитарный). Имеем $h = gf$, $g \in K[X]$.

В алгебраическом замыкании поля L имеем $f = \prod_{j=1}^{n}(X - x_j)$, $x_1 = x$. Поскольку все x_j являются корнями h, все x_j целы над A. Отсюда все коэффициенты f целы над A. Поскольку A целозамкнуто, они лежат в A.

1$\Rightarrow$3. Аналогично, так как множество корней у характеристического многочлена такое же, как у минимального.

1.12.7 Лемма. *Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в A, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec} A$. Тогда если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_k$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ при некотором i.*

[12] т. е. со старшим коэффициентом 1

Д. Индукция по k. Достаточно доказать, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \widehat{\mathfrak{p}_i} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_k$ при некотором i. Предположим, что это не так. Тогда для каждого i найдется

$$x_i \in \mathfrak{a} \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \widehat{\mathfrak{p}_i} \cup \dots \cup \mathfrak{p}_k),$$

и ясно, что $x_i \in \mathfrak{p}_i$, $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ при $j \neq i$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \prod_{i \neq j} x_i \notin \bigcap_{j=1}^{k} \mathfrak{p}_j.$$

1.12.7.1 Замечание. Эта лемма называется леммой об избежании простых. Ее можно усилить следующим образом (см. [E, 3.2]).

1. Достаточно требовать, что все идеалы $\mathfrak{p}_i$, *кроме двух*, являются простыми.
2. Если кольцо A содержит в качестве подкольца бесконечное поле, можно вообще не требовать простоты идеалов.

1.12.8 Предложение. *Пусть A – целозамкнутая область целостности, K – поле частных, L/K – нормальное расширение, $G = \operatorname{Aut}(L/K)$, B – целое замыкание A в L, идеалы $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ таковы, что $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$. Тогда $\exists \sigma \in G : \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1^\sigma$.*

Д. Доказательство будет дано только для случая, когда L/K конечно. (Общий случай см. в [M, (5.E)].) Предположим, $\mathfrak{q}_2 \neq \mathfrak{q}_1^\sigma$ при любом σ. Тогда при любом σ имеем $\mathfrak{q}_2 \not\subset \mathfrak{q}_1^\sigma$ (в силу 1.11.6, поскольку $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{q}_1^\sigma \cap A$). По лемме 1.12.7 получаем $\mathfrak{q}_2 \not\subset \bigcup_{\sigma \in G} \mathfrak{q}_1^\sigma$. Следовательно, найдется $x \in \mathfrak{q}_2$ такой, что $x^\sigma \notin \mathfrak{q}_1$ при каждом $\sigma \in G$. Отсюда

$$N_{L/K} x = \left(\prod_{\sigma \in G} x^\sigma \right)^m \notin \mathfrak{q}_1.$$

С другой стороны, $N_{L/K} x \in \mathfrak{q}_2$, поскольку среди сомножителей есть x, а остальные – элементы B. Отсюда

$$N_{L/K} x \in \mathfrak{q}_2 \cap K = \mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{q}_1 \cap A,$$

противоречие.

1.12.9 Теорема. (Коэна-Зайденберга о спуске) [13] *Пусть B – целое расширение A, A и B – целозамкнутые области целостности, $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ – простые в A, $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$. Тогда найдется $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} B$ такой, что $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.*

Д. Пусть K и L – поля частных A и B. Пусть сперва L/K нормально. По теореме о подъеме можно поднять $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ до $\mathfrak{q}'_1 \subset \mathfrak{q}'_2$. По предыдущему предложению, $\exists \sigma \in \operatorname{Gal}(L/K) : \sigma(\mathfrak{q}'_2) = \mathfrak{q}_2$. Можно взять $\mathfrak{q}_1 = \sigma(\mathfrak{q}'_1)$.

В общем случае пусть M – нормальное расширение K, содержащее L, C – целое замыкание B в M. Поднимем $\mathfrak{q}_2$ в C: $\tilde{\mathfrak{q}}_2 \in \operatorname{Spec} C$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2 \cap B = \mathfrak{q}_2$. По предыдущему случаю поднимем $\mathfrak{p}_1$ в C внутри $\tilde{\mathfrak{q}}_2$ и спустим в B.

[13] Эта теорема, как впрочем, и теорема К.-З. о подъеме, доказана Круллем

1.13 Факториальные кольца

Пусть A – кольцо. Элемент $a \in A$ называется *неприводимым*, если $a \neq 0$, $a \notin A^*$ и из $a = bc$ следует $b \in A^*$ или $c \in A^*$.

Для сравнения: $a \in A$ называется *простым*, если $\langle a \rangle$ – простой идеал. В области целостности, как легко видеть, простой элемент неприводим, но не наоборот (пример: $X^2 \in k[X^2, X^3]$).

Кольцо A называется *факториальным*, если оно является областью, и элементы A (кроме нуля и обратимых) раскладываются в произведение неприводимых единственным образом с точностью до порядка и до умножения на обратимые. В факториальном кольце, как нетрудно видеть, простые и неприводимые элементы – одно и то же.

Следующий факт считается известным из общего курса алгебры.

1.13.1 Теорема. *Пусть A – факториальное кольцо. Тогда и $A[X]$ – факториальное кольцо.* □

В частности, факториальны $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ и $k[X_1, \dots, X_n]$, где k – поле.

1.13.2 Предложение. *Факториальные кольца нормальны.*

Д. Пусть K – поле частных A, $x \in K$, $x = \frac{a}{s}$ – несократимая запись. Уравнение целой зависимости

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

умножим на s^n. Из $a^n + a_1 a^{n-1} s + \dots + a_n s^n = 0$ получаем $s | a^n$. Поскольку a и s взаимно просты (не имеют общих неприводимых делителей), то s обратим и $x \in A$.

Лекция 9

1.14 Алгебры конечного типа над полем

Пусть k – поле, A – k-алгебра. Элементы $x_1, \dots, x_n \in A$ называются *алгебраически независимыми* над k, если для любого ненулевого многочлена $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ выполнено $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

1.14.1 Предложение. (Лемма Нетер о нормализации) *Пусть k – поле, A – k-алгебра конечного типа. Тогда существуют $x_1, \dots, x_n$, алгебраически независимые над k, такие, что A цело над $k[x_1, \dots, x_n]$.*

Д. Пусть $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} Y_1 &:= X_1 \\ Y_2 &:= X_2 - X_1^N \\ &\dots \\ Y_n &:= X_n - X_1^{N^{n-1}} \end{aligned}$$

Очевидно, это обратимая замена, $f = g(Y_1, \dots, Y_n)$, где g – многочлен.

Если N достаточно большое, то $g \in k[Y_2, \dots Y_n][Y_1]$ имеет старший по Y_1 коэффициент, равный константе. Действительно,

$$X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} = Y_1^{r_1 + r_2 N + \dots + r_n N^{n-1}} + \text{ члены меньшей по } Y_1 \text{ степени}$$

и достаточно взять N большим полной степени f.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ – система образующих A над k. Перенумеровав их, можно считать, что $x_1, \ldots, x_n$ алгебраически независимы, а $x_1, \ldots, x_n, x_i$ алгебраически зависимы при всех $i > n$.

Применим индукцию по $m - n$. При $m = n$ имеем $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, и доказывать нечего. Пусть $m - n > 0$.

Поскольку $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ алгебраически зависимы, найдется многочлен $f \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$, $f \neq 0$, такой, что $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. Ввиду рассуждений, приведенных выше, $f = g(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$, причем старший коэффициент в разложении g по степеням Y_{n+1} – константа. Получаем $A = k[y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m]$, где $g(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$, причем можно считать g унитарным по $(n+1)$-й переменной.

Следовательно, y_{n+1} цел над $k[y_1, \ldots, y_n]$, а A цело над $A' = k[y_1, \ldots, y_n, x_{n+2}, \ldots, x_m]$. Осталось применить индукционное предположение к A'.

1.14.2 Теорема. (Гильберта о нулях – алгебраическая форма)
Пусть k поле, A – k-алгебра конечного типа. Тогда если A – поле, то A – конечное расширение k.

Д. По лемме Нетер A цело над $k[x_1, \ldots, x_n]$, где $x_1, \ldots, x_n$ алгебраически независимые. Предположим, что $n \geq 1$. Тогда $\mathfrak{p} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ – простой идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$. По 1.11.7 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap k[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Поскольку A – поле, $\mathfrak{q} = 0$, противоречие.

Пусть $\bar{k}$ – алгебраическое замыкание поля k, $\Phi \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \bar{k}^n$ называется алгебраическим нулем Φ, если $\forall f \in \Phi : f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

1.14.3 Теорема. (Гильберта о нулях – геометрическая форма)
1. Пусть Φ – подмножество, не имеющее алгебраических нулей. Тогда Φ порождает единичный идеал в $k[X_1, \ldots, X_n]$.
2. Пусть $\Phi \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ таков, что f обращается в 0 в любом алгебраическом нуле Φ. Тогда $\exists m : f^m \in \langle \Phi \rangle$.

Д. Пусть $I = \langle \Phi \rangle$.

1. Предположим, $I \neq A$. Тогда $I \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. В силу 1.14.2 поле $k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}$ является алгебраическим расширением k и его можно вложить в $\bar{k}/k$. Следовательно, существует гомоморфизм

$$\theta : k[X_1, \ldots, X_n] \to \bar{k}, \quad \operatorname{Ker} \theta = \mathfrak{m}.$$

Пусть $\theta(X_1) = a_1, \ldots, \theta(X_n) = a_n$. Тогда для любого $f \in \Phi$ имеем

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \theta(f(X_1, \ldots, X_n)) = 0,$$

противоречие.

2. Рассмотрим кольцо $k[X_1, \ldots, X_n, Y]$ и в нем множество $\Phi \cup \{1 - Y \cdot f\}$. У него нет алгебраических нулей. Поэтому, по утверждению 1, найдутся $P_i, Q \in k[X_1, \ldots, X_n, Y]$ и $h_i \in \Phi$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot h_i + Q \cdot (1 - Yf) = 1.$$

Подставив вместо Y дробь $f^{-1} \in k(X_1, \dots, X_n)$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(X_1, \dots, X_n, f^{-1}) \cdot h_i(X_1, \dots, X_n) = 1$$

в $k(X_1, \dots, X_n)$. После домножения на достаточно большую степень f получим

$$\sum g_i(X_1, \dots, X_n) \cdot h_i(X_1, \dots, X_n) = f^m$$

в $k[X_1, \dots, X_n]$.

1.14.3.1 Следствие. *Пусть k алгебраически замкнуто. Тогда любой максимальный идеал в $k[X_1, \dots, X_n]$ имеет вид $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n\rangle$, $a_i \in k$.*

Д. $\mathfrak{m}$ должен иметь хотя бы один алгебраический нуль $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ по первой части 1.14.3. Но тогда по второй части

$$\mathfrak{m} \subset \sqrt{\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n\rangle} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n\rangle.$$

1.14.3.2 Следствие. *Пусть k поле, A – k-алгебра конечного типа, I – собственный идеал A. Тогда*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}.$$

Д. Существует эпиморфизм

$$\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to A.$$

При этом $\varphi^{-1}(\sqrt{I}) = \sqrt{\varphi^{-1}(I)}$, и можно считать $A = k[X_1, \dots, X_n]$.
Пусть $f \in \bigcap_{I \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}$.
Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – любой алгебраический нуль I. Рассмотрим гомоморфизм

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : k[X_1, \dots, X_n] &\to \bar{k} \\ g &\mapsto g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

Ясно, что $\operatorname{Ker} \theta_\alpha$ – максимальный идеал в $k[X_1, \dots, X_n]$, откуда $\theta_\alpha(f) = 0$. По теореме Гильберта о нулях $f \in \sqrt{I}$.

Эквивалентно, для всех $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ имеем

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}.$$

Кольца с таким свойством называются *кольцами Джекобсона.*

1.14.4 Теорема. *Пусть A – k-алгебра конечного типа, при этом A – область с полем частных K, L/K – конечное расширение, B – целое замыкание A в L. Тогда B – конечная A-алгебра.*

1.14.5 Лемма. *Пусть A – целозамкнутая область с полем частных K, L/K – конечное сепарабельное расширение, B – целое замыкание A в L. Тогда B содержится в конечном A-подмодуле поля L.*

Д. 1. Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ – базис L/K. Если $e \in L$, то

$$e^n + \lambda_1 e^{n-1} + \dots + \lambda_n = 0, \quad \lambda_i \in K.$$

Все λ_i можно записать с одним знаменателем $\lambda_i = \frac{a_i}{s}$, $a_i \in A$, $s \in A\backslash\{0\}$. Умножив уравнение на s^n, получаем что se цел над A, откуда $se \in A$. Таким образом, существует базис L/K из элементов B.

2. Поскольку расширение L/K сепарабельно, отображение $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$ представляет собой ненулевую K-линейную функцию. Рассмотрим K-билинейную форму $\langle , \rangle$:

$$\begin{aligned} L \times L \to \quad & K \\ (x, y) \mapsto & \mathrm{Tr}(xy) \end{aligned}$$

Она невырождена и симметрична. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – двойственный базис к $e_1, \dots, e_n$: $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$.

3. Возьмем $y \in B$, тогда $y = \sum \mu_i f_i$, $\mu_i = \langle y, e_i \rangle = \mathrm{Tr}(ye_i)$. Из $e_i \in B$, $y \in B$ следует $ye_i \in B$ и $\mathrm{Tr}_{L/K}(ye_i) \in A$ (след – это один из коэффициентов характеристического многочлена). Получаем $B \subset Af_1 + \dots + Af_n$.

1.14.5.1 Следствие. *Если при тех же предположениях A – нетерово, то B – конечный A-модуль.* $\square$

Доказательство теоремы.

1. В силу леммы Нетер можно считать, что $A = k[X_1, \dots, X_n]$. Если $\mathrm{char}\, K = 0$, то остается применить предыдущее следствие.

2. Убедимся, что L можно увеличивать. Пусть $K \subset L \subset E$, C – целое замыкание A в E. Если сумели доказать, что C – конечная A-алгебра, то B – конечная A-алгебра, так как A нетерово.

Таким образом, можно считать, что L/K нормальное.

3. Можно считать, что L/K чисто несепарабельное. Действительно, пусть $p = \mathrm{char}\, k > 0$. Поскольку L/K нормально, можно разложить L/K в башню из чисто несепарабельного L^G/K и сепарабельного L/L^G, где $G = \mathrm{Aut}(L/K)$. Обозначим через C целое замыкание A в L^G. Предположим, что мы умеем доказывать теорему для чисто несепарабельных расширений. Тогда C – конечная A-алгебра. Поскольку B – конечная C-алгебра по предыдущему следствию, получаем, что B – конечная A-алгебра.

4. Все свелось к случаю $K = k(X_1, \dots, X_n)$, $L = K(\sqrt[q]{f_1}, \dots, \sqrt[q]{f_m})$, $q = p^r$. Согласно пункту 2, можно увеличить L, присоединив корни q-й степени из всех коэффициентов f_i и всех переменных. Кроме того, положим

$$k' = k(\text{корни } q\text{-й степени из всех коэффициентов}).$$

Тогда $B = k'[\sqrt[q]{X_1}, \dots, \sqrt[q]{X_n}]$. (Включение $\supset$ следует из того, что элементы k' и $\sqrt[q]{X_i}$ целы над k, а равенство – из того, что $k'[\sqrt[q]{X_1}, \dots, \sqrt[q]{X_n}]$ имеет поле частных L и целозамкнуто в силу Предложения 1.13.2.) Осталось заметить, что целое расширение конечного типа является конечным расширением.

1.15 Кольца дискретного нормирования

Лекция 10

Сейчас мы изучим кольца, которые наиболее просто устроены – если не считать полей[14].

Пусть K – поле. *Дискретным нормированием*[15] на поле K называется сюръективное отображение $v : K^* \to \mathbb{Z}$ такое, что

1) v – гомоморфизм групп;

2) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ при $x, y, x+y \neq 0$.

1.15.1 Пример Пусть A – факториальное кольцо, K – его поле частных, p – неприводимый элемент. Отображение $v_p : A \setminus \{0\}$ определяется равенством

$$a = \varepsilon \cdot p^{v_p(a)} \cdot p_1^{\cdots} \cdot \ldots$$

Можно корректно продолжить v_p на K:

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b).$$

Получили дискретное нормирование на поле K (так называемое p-адическое нормирование).

Пусть v – дискретное нормирование на поле K; приняв условно, что $v(0) = +\infty$, положим

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$$

Это подкольцо поля K и оно является ***кольцом нормирования***, то есть обладает свойством:

$$\forall x \in K^* : x \in \mathcal{O} \text{ или } x^{-1} \in \mathcal{O}.$$

1.15.2 Лемма. *Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо нормирования в K. Тогда $\mathcal{O}$ локально и целозамкнуто.*

Д. 1. Пусть $\mathfrak{m} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$. Для локальности достаточно проверить, что $\mathfrak{m}$ идеал. Замкнутость относительно умножения на элементы $\mathcal{O}$ очевидна, и осталось проверить, что для $x, y \in \mathfrak{m}$ имеем $x + y \notin \mathcal{O}^*$.

Если $x = 0$ или $y = 0$, это очевидно. В противном случае имеем либо $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}$, либо $\frac{x}{y} \in \mathcal{O}$. Будем считать $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}$. Имеем

$$x + y = x\left(1 + \frac{y}{x}\right) \in \langle x \rangle.$$

Поскольку $\langle x \rangle$ – собственный идеал в $\mathcal{O}$, получаем $x + y \notin \mathcal{O}^*$.

2. Пусть $x \in K$, $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $a_i \in \mathcal{O}$. Пусть $x \notin \mathcal{O}$. Тогда $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Домножив уравнение целой зависимости на x^{1-n}, получим

$$x = -a^{n-1} - a_{n-2}x^{-1} - \cdots - a_0(x^{-1})^{n-1} \in \mathcal{O},$$

противоречие.

[14]Вообще-то, Вам могут больше понравиться мелкие артиновы кольца типа $k[X]/\langle X^2 \rangle$ или $k \times k$, где k – поле. Это дело вкуса. Но если ограничиваться только областями, то кольца дискретного нормирования вне конкуренции.

[15]точнее говоря, дискретным нормированием ранга 1

В частности, если v – дискретное нормирование, то $\mathcal{O}_v$ – локальное целозамкнутое кольцо.

1.15.3 Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ – локальная нетерова область размерности 1 с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Тогда 6 условий эквивалентны.*

1. $\mathcal{O}$ – кольцо дискретного нормирования.
2. $\mathcal{O}$ целозамкнуто.
3. $\mathcal{O}$ – область главных идеалов.
4. $\mathfrak{m}$ главный.
5. $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$, где $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.
6. Всякий ненулевой идеал в кольце $\mathcal{O}$ – степень $\mathfrak{m}$.

Д.

4⇒5 тривиально.

5⇒4 непосредственно из леммы Накаямы.

1⇒3⇒2 уже знаем (факториальное кольцо целозамкнуто).

4⇒6. Пусть I – произвольный идеал $\mathcal{O}$, отличный от нуля. Имеем

$$\sqrt{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}\\ \mathfrak{p}\supset I}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m} = \langle t\rangle.$$

(Поскольку размерность равна 1, единственный ненулевой простой идеал – это $\mathfrak{m}$.) Следовательно, при некотором m имеем $t^m \in I$, откуда $I \not\subset \langle t^{m+1}\rangle$. Рассмотрим максимальное n такое, что $I \subset \langle t^n\rangle$. Пусть $u \in I \setminus \langle t^{n+1}\rangle$. Получаем $u = t^n v$, $v \notin \mathfrak{m}$, откуда v обратим, $t^n \in I$ и $I = \langle t^n\rangle$.

6⇒1. По лемме Накаямы $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Пусть $t \in \mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$; ясно, что $\langle t\rangle = \mathfrak{m}$. Для произвольного ненулевого $x \in \mathcal{O}$ имеем $\langle x\rangle = \mathfrak{m}^r$ при некотором $r \geq 0$. Ввиду леммы Накаямы r определено однозначно, и мы положим $v(x) = r$. Очевидно, что

$$v(x) = r \iff x = \varepsilon\cdot t^r,\ \varepsilon\in\mathcal{O}^*. \tag{1.1}$$

На поле частных положим $v(\frac{a}{b}) = v(a) - v(b)$. Тогда для элементов K также выполняется (1.1). Из (1.1) сразу видно, что $v(xy) = v(x) + v(y)$ и $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

2⇒4. Пусть $a \in \mathfrak{m}$, $a \neq 0$. Имеем

$$\sqrt{\langle a\rangle} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}\\ \mathfrak{p}\supset\langle a\rangle}} \mathfrak{p} = \mathfrak{m}.$$

Из нетеровости $\mathfrak{m}^n \subset \langle a\rangle$ при некотором n; выберем наименьшее такое n. Выберем $b \in \mathfrak{m}^{n-1}\setminus\langle a\rangle$; имеем $\frac{b}{a} \notin \mathcal{O}$. Легко видеть, что $\frac{b}{a}\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$: если это не так, то $\mathfrak{m}$ – конечно порожденный точный $\mathcal{O}[\frac{b}{a}]$ модуль, и $\frac{b}{a}$ цел над $\mathcal{O}$ что невозможно из-за целозамкнутости $\mathcal{O}$. С другой стороны, $\frac{b}{a}\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$, так как $b\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^n \subset \langle a\rangle$. Таким образом, $\frac{b}{a}\mathfrak{m}$ – идеал, не лежащий в $\mathfrak{m}$, откуда $\frac{b}{a}\mathfrak{m} = \mathcal{O}$, и $\mathfrak{m} = \frac{a}{b}\mathcal{O}$.

1.15.3.1 Замечание. В условии 4 можно не требовать a priori, что $\dim A = 1$, то есть на самом деле если в локальной нетеровой области максимальный идеал главный, то это кольцо дискретного дискретного нормирования.

Действительно, размерность 1 использовалась только при проверке того, что $I \not\subset \langle t^{m+1} \rangle$. Но вместо этого можно использовать общий факт, который будет доказан позднее: если $\mathfrak{a}$ – собственный идеал нетеровой области, то $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

1.16 Дедекиндовы области

1.16.1 Лемма. *Пусть A – область. Тогда три условия равносильны.*

1. A целозамкнута.

2. Для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ область $A_{\mathfrak{p}}$ целозамкнута.

3. Для всякого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ область $A_{\mathfrak{m}}$ целозамкнута.

Д. 1⇒2 было.

2⇒3 тривиально.

3⇒1. Пусть x цел над A. Тогда для любого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ элемент x цел над $A_{\mathfrak{m}}$. Отсюда по лемме 1.12.3

$$x \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} A_{\mathfrak{m}} = A.$$

Идеал $\mathfrak{a}$ кольца A называется *примарным*, если $\mathfrak{a} \neq A$ и из $xy \in \mathfrak{a}$ следует, что либо $x \in \mathfrak{a}$, либо $\exists n : y^n \in \mathfrak{a}$. Очевидно, радикал примарного идеала прост.

1.16.2 Лемма. *1. Если $\mathfrak{a}$ примарен, то $\sqrt{\mathfrak{a}}$ прост.*

2. Если $\sqrt{\mathfrak{a}}$ максимален, то $\mathfrak{a}$ примарен.

Д. «1» очевидно.

«2». Пусть $xy \in \mathfrak{a}$, $x \notin \mathfrak{a}$, $y \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$. Тогда найдется z такое, что $yz \equiv 1 \mod \sqrt{\mathfrak{a}}$, так как $A/\sqrt{\mathfrak{q}}$ – поле. Следовательно, $(yz-1)^n \in \mathfrak{a}$ при некотором n, откуда $1 - yz' \in \mathfrak{a}$ при некотором z' и $x = x(1-yz') + xyz' \in \mathfrak{a}$.

1.16.3 Теорема. *Пусть A – нетерова одномерная область. Тогда следующие условия равносильны.*

1. A целозамкнута.

2. Всякий ненулевой примарный идеал – степень максимального.

3. Для максимального идеала $\mathfrak{m}$: $A_{\mathfrak{m}}$ – кольцо дискретного нормирования.

Д. $1 \iff 3$ из леммы 1.16.1.

2⇒3. Пусть $\mathfrak{a} \neq 0$ – идеал $A_{\mathfrak{m}}$. Тогда $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, откуда

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cap A} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cap A = \mathfrak{m}.$$

По условию 2 и лемме 1.16.2, $\mathfrak{a} \cap A = \mathfrak{m}^r$ и

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap A)A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^r A_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^r.$$

Поскольку каждый ненулевой идеал – степень максимального, $A_{\mathfrak{m}}$ – кольцо дискретного нормирования.

3⇒2. Пусть $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$. При некотором r имеем $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^r$, откуда

$$(\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}) \cap A = (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^r \cap A = (\mathfrak{m}^r A_{\mathfrak{m}}) \cap A.$$

Осталось заметить, что любой примарный идеал с радикалом $\mathfrak{m}$ – насыщенный по отношению к мультипликативной системе $A \setminus \mathfrak{m}$.

1.16.4 Предложение. *Пусть A – дедекиндова область с полем частных K, L/K – конечное сепарабельное расширение, B – целое замыкание A в L. Тогда B – дедекиндова область.*

Д. По лемме 1.14.5, B – конечная A-алгебра; по теореме Гильберта о базисе B нетерово.

Например, целое замыкание $\mathbb{Z}$ в любом поле алгебраических чисел – дедекиндова область.

1.16.4.1 Замечание. На самом деле сепарабельность расширения не нужна: смотри обсуждение в конце параграфа.

Лекция 11

Пусть A – область, K – ее поле частных. A-подмодуль I в поле K называется *дробным идеалом*, если $I \neq 0$ и существует $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, такой, что $\alpha I \subset A$. Ясно, что если A нетерово, то I конечно порожден. Если I порожден одним элементом, то говорят, что I – *главный дробный идеал*. Определим

$$I^{-1} = \{\alpha \in K | \alpha I \subset A\}.$$

Это A-подмодуль в K. Дробный идеал I называется *обратимым*, если $I^{-1}I = A$. Любой главный идеал обратим: $\langle a \rangle^{-1} = \langle a^{-1} \rangle$.

1.16.5 Лемма. *Пусть I конечно порожден. Тогда*

$$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : (I^{-1})_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}^{-1}.$$

Д. «$\subset$». Очевидный факт, конечная порожденность не нужна.

«$\supset$». Пусть $I = a_1A + \cdots + a_nA$. Рассмотрим $x \in I_{\mathfrak{p}}^{-1}$. Из $xa_i \in A_{\mathfrak{p}}$ следует $c_ixa_i \in A$ при некотором $c_i \in A \setminus \mathfrak{p}$. Пусть $c = c_1 \dots c_n$. Тогда $cx \in I^{-1}$, откуда $x \in (I^{-1})_{\mathfrak{p}}$.

1.16.6 Теорема. *Пусть I – дробный идеал A. Тогда I обратим, если и только если I конечно порожден, и для любого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$: $IA_{\mathfrak{m}}$ – главный дробный идеал.*

Д. $\Rightarrow$. Поскольку $II^{-1} = 1$, можно написать

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = 1, \tag{1.2}$$

где $a_i \in I$, $b_i \in I^{-1}$. Отсюда

$$\forall x \in I : x = \sum_{i=1}^{n} (xb_i)a_i,$$

и $I = a_1A + \cdots + a_nA$.

Далее, для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ из (1.2) следует $a_ib_i \notin \mathfrak{p}$ при некотором i, откуда $a_ib_i \in A_{\mathfrak{p}}^*$. Таким образом,

$$\exists a \in I_{\mathfrak{p}}, b \in I_{\mathfrak{p}}^{-1} : ab = 1.$$

Рассуждая как в предыдущем абзаце, получаем $I_{\mathfrak{p}} = aA_{\mathfrak{p}}$.

$\Leftarrow$. Предположим, что $I \cdot I^{-1} \neq A$; тогда найдется $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ такой, что $II^{-1} \subset \mathfrak{m}$, откуда по лемме

$$I_\mathfrak{m} \cdot I_\mathfrak{m}^{-1} = I_\mathfrak{m} \cdot (I^{-1})_\mathfrak{m} = (II^{-1})_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} A_\mathfrak{m}.$$

С другой стороны, поскольку $I_\mathfrak{m}$ главный, то $I_\mathfrak{m} \cdot I_\mathfrak{m}^{-1} = A_\mathfrak{m}$, противоречие.

1.16.6.1 Замечание. Эти два условия эквивалентны также такому условию: I – проективный A-модуль [M2, Theorem 11.3].

Высотой простого идеала $\mathfrak{p}$ называется

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \max\{n | \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\} = \dim A_\mathfrak{p}.$$

1.16.7 Предложение. *Пусть A – нетерова область, $\mathfrak{p} \neq 0$ – простой идеал. Если $\mathfrak{p}$ обратим, то $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$, и $A_\mathfrak{p}$ – кольцо дискретного нормирования.*

Д. Поскольку $\mathfrak{p}$ обратим, $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$ также обратим и, по теореме, является главным идеалом. По замечанию 1.15.3.1, $A_\mathfrak{p}$ – кольцо дискретного нормирования, откуда $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p} = 1$.

1.16.8 Теорема. *Пусть A – область, $\dim A > 0$. Тогда A – дедекиндова область, если и только если любой ненулевой идеал A обратим.*

Д. $\Rightarrow$. Для любого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ кольцо $A_\mathfrak{m}$ – кольцо дискретного нормирования. Значит, все его идеалы – главные. Отсюда следует, что и все дробные идеалы главные, следовательно, любой дробный идеал A обратим.

$\Leftarrow$. Любой ненулевой идеал A обратим и, следовательно, конечно порожден, откуда следует, что A нетерово. Для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{p} \neq 0$, по предыдущему предложению $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$. Следовательно, $\dim A = 1$, и A – дедекиндова область.

1.16.9 Предложение. *Пусть A – дедекиндова область. Тогда любой ненулевой идеал A представляется в виде произведения простых идеалов. Такое представление единственно с точностью до порядка.*

Д. Пусть $\mathfrak{a}$ – ненулевой идеал A. Если $\mathfrak{a} = A$, то можно считать $\mathfrak{a}$ произведением пустого набора простых идеалов. Пусть $\mathfrak{a}$ – максимальный среди идеалов, для которых не существует искомого разложения.

Поскольку $\mathfrak{a} \neq A$, имеем $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, и выполнено $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subset A$.

Предположим, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$. Тогда $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{a}$, откуда $(\mathfrak{a} A_\mathfrak{m}) \cdot (\mathfrak{m} A_\mathfrak{m}) = \mathfrak{a} A_\mathfrak{m}$. Локализация обратимого идеала – обратимый идеал, поэтому, домножив равенство на $(\mathfrak{a} A_\mathfrak{m})^{-1}$, мы получим противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \supsetneqq \mathfrak{a}$, тогда $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$, $\mathfrak{m}_i \in \operatorname{Max} A$, откуда $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$, противоречие.

Наконец, пусть $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_1 \ldots \mathfrak{m}'_s$. Из $\mathfrak{m}'_1 \ldots \mathfrak{m}'_s \subset \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$ следует, что при некотором i имеем $\mathfrak{m}'_i \subset \mathfrak{m}_1$, откуда $\mathfrak{m}'_i = \mathfrak{m}_1$. Можно считать, что $i = 1$. Умножая на $\mathfrak{m}_1^{-1}$, получим $\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_2 \ldots \mathfrak{m}'_s$, и остается применить индукцию по r.

1.16.9.1 Замечание. На самом деле верно и обратное: если в области любой ненулевой идеал – произведение конечного числа простых, то это дедекиндова область [M2, Theorem 11.6].

1.16.9.2 Следствие. *Пусть A – одномерная нетерова область, K – поле частных, L – конечное расширение K, B – целое замыкание A в L. Тогда B – дедекиндова область, и над любым максимальным идеалом A лежит конечное число простых в B.*

Д. То, что B нетерово, вытекает из приводимой ниже теоремы Крулля-Акизуки. (См. также 1.16.4 в случае сепарабельного L/K.) Поскольку B цело над A, $\dim B = \dim A = 1$. Пусть $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Тогда $\mathfrak{m}B \neq B$, так как $\exists \mathfrak{m}' \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$. Отсюда

$$\mathfrak{m}B = \mathfrak{m}_1^{n_1} \dots \mathfrak{m}_r^{n_r}, \quad \mathfrak{m}_i \in \operatorname{Max} B.$$

Из $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_i$ следует $\mathfrak{m}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{m}' \in \operatorname{Max} B$ таков, что $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$. Из $\mathfrak{m}' \supset \mathfrak{m}_1^{n_1} \dots \mathfrak{m}_r^{n_r}$ следует, что при некотором i имеем $\mathfrak{m}' \supset \mathfrak{m}_i$ и $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_i$.

1.16.10 Теорема. (Крулля – Акизуки) *Пусть A – нетерова область с полем частных K, $\dim A \leq 1$, L/K – конечное расширение, B – подкольцо в L, содержащее A. Тогда B нетерово и $\dim A = 1$.*

Д. См. [E, Theorem 11.13], или [M2, Theorem 11.17], или [B, глава VII, §2, предл. 5].