Глава 2

Теория размерности

Лекция 12

2.1 Градуированные кольца и модули

Градуированное кольцо – это кольцо A, для которого задано разложение аддитивной группы

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n,$$

причем $\forall m, n : A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}$.

Пример: кольцо многочленов от нескольких переменных над произвольным кольцом; при этом A_n – однородные многочлены полной степени n.

Градуированный модуль – это модуль M над градуированным кольцом A с разложением (как группы)

$$M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n,$$

причем $\forall m, n : A_m \cdot M_n \subset M_{m+n}$.

Элементы A_n (соответственно M_n) называются *однородными элементами степени* n. Если $m = \sum m_i$, где $m_i \in M_i$, то m_i называют *однородными компонентами* m.

Подмодуль N градуированного модуля M называется градуированным подмодулем, если $N = \bigoplus_{n \geq 0} (N \cap M_n)$.

2.1.1 Лемма. *Пусть M – градуированный A-модуль, N – подмодуль в M. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

1. N – градуированный подмодуль.

2. N порожден однородными элементами.

3. Если $n \in N$, то все однородные компоненты n лежат в N.

Д. 3⇒1⇒2 тривиально.

2⇒3. Для $n \in N$ имеем $n = \sum_{j=0}^{m} a^{(j)} n_j$, $n_j \in N \cap M_{r_j}$. Далее, $a^{(j)} = \sum a_k^{(j)}$, $a_k^{(j)} \in A_k$. Отсюда

$$n = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k \geq 0} a_k^{(j)} n_j = \sum_{l \geq 0} \left(\sum_{k + r_j = l} a_k^{(j)} n_j \right),$$

причем каждая из внутренних сумм является элементом $N \cap M_l$.

Если N – градуированный подмодуль в N, то

$$M/N = \bigoplus (M_n/N \cap M_n)$$

– также градуированный модуль.

Идеал $\mathfrak{a}$ называется градуированным, если это градуированный подмодуль A. При этом

$$A/\mathfrak{a} = \bigoplus (A_n/\mathfrak{a} \cap A_n)$$

– градуированное кольцо!

2.1.2 Лемма. *Пусть A – градуированное кольцо, $A_+ = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$. Тогда равносильны 2 утверждения.*

1. A_+ – конечно порожденный идеал.

2. A – A_0-алгебра конечного типа.

Д. И в «1», и в «2» можно считать, что конечная система образующих состоит из однородных элементов. Поэтому достаточно доказать, что для $x_1, \dots, x_n \in A$, $\deg x_i = k_i > 0$, имеем:

$$A_+ = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \iff A = A_0[x_1, \dots, x_n].$$

$\Leftarrow$. Пусть $x \in A_k$, $k > 0$. Тогда $x = P(x_1, \dots, x_n)$, $P \in A_0[X_1, \dots, X_n]$. Поскольку свободный член равен нулю, $P(x_1, \dots, x_n) \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

$\Rightarrow$. Пусть $A_+ = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Рассмотрим $x \in A_k$. Докажем, что $x \in A_0[x_1, \dots, x_n]$ индукцией по k. Если $k = 0$, это тривиально, а иначе $x = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, $y_i \in A$. У обеих частей возьмем однородные компоненты степени k: $x = x_1\tilde{y}_1 + \dots + x_n\tilde{y}_n$, где

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} \text{однородная компонента } y_i \text{ степени } k - k_i, & k \geq k_i, \\ 0, & k < k_i. \end{cases}$$

Поскольку $\tilde{y}_i$ – однородный элемент степени, меньшей k, это элемент $A_0[x_1, \dots, x_n]$.

2.1.2.1 Следствие. *Градуированное кольцо A нетерово, если и только если кольцо A_0 нетерово, а A_+ – конечно порожденный идеал.*

Д. $\Rightarrow$. $A_0 = A/A_+$ нетерово; A_+ – идеал в нетеровом кольце.

$\Leftarrow$ по лемме.

Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал, M – конечно порожденный A-модуль. Рассмотрим убывающую фильтрацию на модуле M, т. е. цепочку подмодулей

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \tag{2.1}$$

Она называется $\mathfrak{a}$-*фильтрацией*, если для всех i имеем $\mathfrak{a}M_i \subset M_{i+1}$. Если при этом $M_{i+1} = \mathfrak{a}M_i$ для всех i, то это $\mathfrak{a}$-*адическая фильтрация*, а если это так для всех достаточно больших i, то это *по существу* $\mathfrak{a}$-*адическая фильтрация*.

2.1.3 Лемма. *Пусть A, $\mathfrak{a}$, M – как выше, и на M задана $\mathfrak{a}$-фильтрация* (2.1). *Положим*

$$A^* = A + \mathfrak{a} \cdot X + \mathfrak{a}^2 \cdot X^2 + \dots \subset A[X],$$
$$M^* = M_0 + M_1 \cdot X + M_2 \cdot X^2 + \dots \subset M[X].$$

На M^* есть очевидная структура A^*-модуля. Тогда следующие 2 утверждения эквивалентны.

1. *Фильтрация* (2.1) *по существу $\mathfrak{a}$-адическая.*
2. *M^* – конечно порожденный A^*-модуль.*

Д. 1⇒2. Пусть $M_{n+1} = \mathfrak{a} \cdot M_n$ при $n \geq n_0$. Тогда M^* порожден над A^* множеством $M_0 + M_1 \cdot X + \dots + M_{n_0} \cdot X^{n_0}$. Поскольку M – конечно порожденный A-модуль, $M_0 + M_1 \cdot X + \dots + M_{n_0} \cdot X^{n_0}$ также конечно порожден над A.

2⇒1. Все образующие M^* должны содержаться в $M_0 + M_1 \cdot X + \dots + M_{n_0} \cdot X^{n_0}$ при достаточно большом n_0. Однако порождаемый этим множеством A^*-модуль имеет вид

$$M_0 + M_1 \cdot X + \dots + M_{n_0} \cdot X^{n_0} + (\mathfrak{a} \cdot M_{n_0}) \cdot X^{n_0+1} + \dots$$

2.1.3.1 Следствие. (Лемма Артина-Риса) *Пусть A – нетерово кольцо, M – конечно порожденный A-модуль, $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ – по существу $\mathfrak{a}$-адическая фильтрация, N – подмодуль M. Тогда индуцированная на N фильтрация $N = N \cap M_0 \supset N \cap M_1 \supset \dots$ – также по существу $\mathfrak{a}$-адическая.*

Д. По лемме 2.1.2 A^* нетерово. Действительно: A нетерово; $A^*_+ = (\mathfrak{a}X) \cdot A^*$; если $a_1, \dots, a_n$ порождают $\mathfrak{a}$, то $a_1X, \dots, a_nX$ порождают A^*_+.

По лемме 2.1.3 M^* конечно порожденный, N^* подмодуль в нем, следовательно, N^* – конечно порожденный.

2.1.4 Теорема. (Крулля о пересечении) *Пусть A нетерово, $\mathfrak{a}$ идеал, M – конечно порожденный A-модуль. Положим $N = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n M$. Тогда $\mathfrak{a}N = N$.*

Д. При больших n имеем

$$N \subset \mathfrak{a}^n M \cap N = \mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^r M \cap N) \subset \mathfrak{a}N.$$

2.1.4.1 Следствие. *В условиях теоремы найдется $a \in A$ такой, что $a \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$ и $aN = 0$.*

Д. Пусть $m_1, \dots, m_n$ – система образующих N. Из $m_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j$, где $a_{ij} \in \mathfrak{a}$, следует

$$(E_n - (a_{ij})) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0$$

Умножив на присоединенную матрицу, получим

$$(aE_n) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0,$$

где $a = \det(E_n - (a_{ij}))$. Ясно, что a – искомое.

2.1.4.2 Следствие. *Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac} A$. Тогда $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.*

Д. По лемме Накаямы.

2.1.4.3 Следствие. *Пусть A – нетерова область, $\mathfrak{a}$ – собственный идеал. Тогда $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.*

Д. Это следует из $a \cdot \left(\bigcap \mathfrak{a}^n\right) = 0$, $a \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$.

Лекция 13

2.2 Многочлены Гильберта-Самюэля

2.2.1 Лемма. *Пусть $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f(n) \geq 0$ для почти всех $n \in \mathbb{N}$, $f \neq 0$. Тогда старший коэффициент f положителен.*

Д. Если $f = a_r X^r + \dots + a_0$, то $a_r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^r}$.

2.2.1.1 Следствие. *Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ с положительным старшим коэффициентом, $f(n) \geq g(n)$ при $n \gg 0$. Тогда $\deg f \geq \deg g$; если $\deg f = \deg g$, то старший коэффициент у f больше, чем у g.* $\square$

2.2.2 Лемма. *Для отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и числа $r \geq 0$ следующие утверждения эквивалентны.*

1. Существует $P \in \mathbb{Q}[X]$ такой, что $\deg P \leq r+1$ и $f(n) = P(n)$ при почти всех n.

2. Существует $Q \in \mathbb{Q}[X]$ такой, что $\deg Q \leq r$ и $f(n+1) - f(n) = Q(n)$ при почти всех n.

Д. 1⇒2 очевидно.

2⇒1. Введем многочлены

$$\binom{X}{i} = \frac{1}{i!} X(X-1)\dots(X-i+1), \qquad i \geq 0.$$

Ясно, что $\binom{X}{i}$ образуют базис $\mathbb{Q}[X]$ над $\mathbb{Q}$. Заметим: $\binom{n}{j} + \binom{n-1}{j} + \dots + \binom{j}{j} = \binom{n+1}{j+1}$.

Пусть $Q = \sum_{k=0}^{r} a_k \binom{X}{k}$. Для достаточного большого n_0 имеем при $n > n_0$ (можно считать $n_0 > r$):

$$\begin{aligned}
f(n+1) = f(n) + Q(n) = \dots &= \sum_{\alpha=0}^{n-n_0} Q(n-\alpha) + f(n_0) \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{\alpha=0}^{n-n_0} \binom{n-\alpha}{k} \right) + f(n_0) \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{\beta=k}^{n} \binom{\beta}{k} - \sum_{\beta=k}^{n_0-1} \binom{\beta}{k} \right) + f(n_0) \\
&= \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{n_0}{k+1} \right) + f(n_0).
\end{aligned}$$

В качестве искомого подходит

$$P = \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\binom{X+1}{k+1} - \binom{n_0}{k+1} \right) + f(n_0).$$

Далее $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ такое, что A_0 артиново и $A = A_0[x_1, \ldots, x_n]$, где все $x_i \in A_1$. (При этом автоматически A нетерово.)

2.2.3 Лемма. $l_{A_0}(A_r) \leq \binom{n+r-1}{r-1} \cdot l_{A_0}(A_0)$.

Д. Гомоморфизм

$$\begin{aligned} A_0[X_1, \ldots, X_n] &\to A \\ X_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

сюръективен и сохраняет градуировку. Отсюда

$$l_{A_0}(A_r) \leq l_{A_0}(A_0[X_1, \ldots, X_r]_r) = \binom{n+r-1}{r-1} \cdot l_{A_0}(A_0).$$

Пусть $M = \bigoplus M_n$ – конечно порожденный градуированный A-модуль. Можно считать, что он порожден однородными m_i, $\deg m_i = d_i$, $i = 1, \ldots, r$. Отсюда

$$M_n = \sum_{i=1}^{r} A_{n-d_i} \cdot m_i$$

(считаем $A_i = 0$ при $s < 0$) и $l_{A_0}(M_n) < \infty$.

2.2.4 Теорема. (Гильберт) *Пусть $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ – градуированное кольцо, причем A_0 артиново и $A = A_0[x_1, \ldots, x_n]$, $x_i \in A_1$. Пусть M – конечно порожденный градуированный A-модуль, $f(n) = l_{A_0}(M_n)$. Тогда найдется $P \in \mathbb{Q}[X]$ такой, что $f(n) = P(n)$ при $n \gg 0$. При этом $\deg P \leq r - 1$, старший коэффициент P положителен или $P = 0$.*

Многочлен P называют *многочленом Гильберта-Самюэля* модуля M и обозначают φ_M.

Д. Индукция по r.

$\underline{r = 0}$. Кольцо $A = A_0$ артиново, откуда $l_{A_0}(M) < \infty$ и $l_{A_0}(M_n) = 0$ для $n \gg 0$.

$\underline{r > 0}$. Рассмотрим $B = A/\langle x_r \rangle$; это градуированное кольцо, так как $\langle x_r \rangle$ – однородный идеал. При этом $B_0 = A_0/(\langle x_r \rangle \cap A_0) = A_0$ артиново, и $B = B_0[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{r-1}}]$. По индукционному предположению для B все верно. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi : M_n &\to M_{n+1} \\ m &\mapsto x_r m \end{aligned}$$

и положим $N_n = \operatorname{Ker} \varphi$, $R_{n+1} = \operatorname{Coker} \varphi$. Из точной последовательности

$$0 \to N_n \to M_n \to M_{n+1} \to R_{n+1} \to 0$$

имеем

$$l_{A_0}(M_{n+1}) - l_{A_0}(M_n) = l_{A_0}(R_{n+1}) - l_{A_0}(N_n).$$

Рассмотрим градуированные A_0-модули

$$N = \bigoplus_{i\geq 0} N_i, \qquad R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$$

(считая $R_0 = 0$). Поскольку $x_r N = x_r R = 0$, их можно рассматривать как градуированные B-модули. Следовательно, найдутся $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg f \leq r-2$, $\deg g \leq r-2$, такие, что $l_{B_0}(N_n) = f(n)$ и $l_{B_0}(R_n) = g(n)$ при $n \gg 0$. Учитывая, что $l_{A_0}(N_n) = l_{B_0}(N_n)$, $l_{A_0}(R_n) = l_{B_0}(R_n)$, получаем, что существует $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg f \leq r-2$, такой, что $l_{A_0}(M_{n+1}) - l_{A_0}(M_n) = Q(n)$ при $n \gg 0$. По лемме 2.2.2 существует $P \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg f \leq r-1$, такой, что $l_{A_0}(M_n) = Q(n)$ при $n \gg 0$. По лемме 2.2.1 старший коэффициент P положителен или $P = 0$.

2.2.5 Пример $A = A_0[X_0, X_1, \ldots, X_r]$. Имеем $l_{A_0} A_n = \binom{n+r}{r}$ и

$$\varphi_A = \frac{l(A_0)}{r!}(X+r)(X+r-1)\ldots(X+1).$$

2.2.6 Пример Пусть k – поле, $F \in k[X_0, \ldots, X_r]$ – однородный степени s,

$$A = k[X_0, \ldots, X_r]/\langle F\rangle.$$

Тогда при $n \geq s$ имеем

$$l_k(A_n) = \binom{n+r}{r} - \binom{n-s+r}{r}.$$

Учитывая, что

$$\binom{n+r}{r} = \frac{1}{r!}n^r + a_1 n^{r-1} + \ldots,$$

получаем

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{1}{r!}(X^r - (X-s)^r) + a_1(X^{r-1} - (X-s)^{r-1}) + \ldots \\ &= \frac{s}{(r-1)!}X^{r-1} + \text{члены меньшей степени.}\end{aligned}$$

2.3 Функции Самюэля

Кольцо A называется *полулокальным*, если множество $\operatorname{Max} A$ конечно. Идеал $\mathfrak{a}$ полулокального нетерова кольца A называется *идеалом определения*, если $\exists n : (\operatorname{Jac} A)^n \subset \mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac} A$.

2.3.1 Лемма. *Пусть A – полулокальное нетерово кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал. Тогда следующие 3 условия эквивалентны.*

1. $\mathfrak{a}$ – идеал определения в A.

2. $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Jac} A$, и $A/\mathfrak{a}$ артиново.

3. $V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Max} A$.

Д.

$2 \iff 3$ очевидно.

$1 \Rightarrow 3$. Ясно, что $V(\mathfrak{a}) \supset \operatorname{Max} A$. Пусть $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Имеем

$$\mathfrak{p} \supset (\operatorname{Jac} A)^n \supset \left(\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i\right)^n,$$

откуда $\exists i : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}_i$.

$2 \Rightarrow 1$. Поскольку $A/\mathfrak{a}$ артиново, $l_A(A/\mathfrak{a}) < \infty$. Следовательно, цепочка

$$A/\mathfrak{a} \supset (\operatorname{Jac} A) \cdot (A/\mathfrak{a}) \supset \dots \supset (\operatorname{Jac} A)^n \cdot (A/\mathfrak{a}) \supset \dots$$

стабилизируется. По лемме Накаямы, $\exists n : (\operatorname{Jac} A)^n \cdot (A/\mathfrak{a}) = 0$.

2.3.1.1 Замечание. В локальном нетеровом кольце идеалы определения – это в точности $\mathfrak{m}$-примарные идеалы, т. е. примарные с радикалом $\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный.

Пусть A – полулокальное нетерово кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал определения, M – конечно порожденный A-модуль. Положим

$$\operatorname{gr} A := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i/\mathfrak{a}^{i+1}, \qquad \operatorname{gr} M := \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i M/\mathfrak{a}^{i+1} M;$$

это градуированное кольцо и градуированный модуль над ним. Поскольку $\mathfrak{a}^i M/\mathfrak{a}^{i+1} M$ – конечно порожденный модуль над артиновым кольцом $A_0 = A/\mathfrak{a}$, это модуль конечной длины.

Можно также рассмотреть по существу $\mathfrak{a}$-адическую фильтрацию (F):

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$$

Положим

$$\operatorname{gr}_F M := \bigoplus_{i \geq 0} M_i/M_{i+1};$$

это градуированный модуль над $\operatorname{gr} A$. Как и в предыдущем случае, имеем $l_{A_0}(M_i/M_{i+1}) < \infty$.

2.3.2 Теорема. (Самюэль) *Существует многочлен $P_F(M, -)$ (соответственно $P_{\mathfrak{a}}(M, -)$) такой, что при больших n имеем $l_{A_0}(M/M_n) = P_F(M, n)$ (соответственно $l_{A_0}(M/\mathfrak{a}^n M) = P_{\mathfrak{a}}(M, n)$). При этом $\deg P_F(M, -) \leq r$ (соответственно $\deg P_{\mathfrak{a}}(M, -) \leq r$), где r – минимальное число образующих идеала $\mathfrak{a}$.*

Д. Достаточно доказать существование $P_F(M, n)$. По теореме Гильберта о характеристическом многочлене $l_{A_0}(M_n/M_{n+1}) = \varphi_{\operatorname{gr}_F M}(n)$ при $n \gg 0$; $\deg \varphi_{\operatorname{gr}_F M} \leq r - 1$. По лемме 2.2.2 существует $P_F(M, -)$.

Лекция 14

2.3.3 Предложение. *$P_F(M, -)$ и $P_{\mathfrak{a}}(M, -)$ имеют одинаковую степень и одинаковый старший коэффициент.*

Д. Имеем $M_{n+n_0} = \mathfrak{a}^n M_{n_0} \subset \mathfrak{a}^n M \subset M_n$ при $n_0 \gg 0$ и любом n, откуда

$$P_F(M, n+n_0) \geq P_\mathfrak{a}(M,n) \geq P_F(M,n)$$

при $n_0 \gg 0$. Следовательно,

$$\deg P_F(M,X) = \deg P_F(M, X+n_0) \geq \deg P_\mathfrak{a}(M,X) \geq \deg P_F(M,X)$$

по следствию 2.2.1.1. По тому же следствию

$$\begin{aligned} \text{ст. коэфф. } P_F(M,X) &= \text{ст. коэфф. } P_F(M, X+n_0) \\ &\geq \text{ст. коэфф. } P_\mathfrak{a}(M,X) \\ &\geq \text{ст. коэфф. } P_F(M,X). \end{aligned}$$

Следовательно, везде равенство.

2.3.4 Предложение. *Пусть M – конечно порожденный A-модуль, $\mathfrak{a}$ – идеал определения.*

1. $P_{\mathfrak{a}^m}(M,n) = P_\mathfrak{a}(M,nm)$.

2. Пусть $\mathfrak{a}'$ – также идеал определения, $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Тогда $P_{\mathfrak{a}'}(M,n) \geq P_\mathfrak{a}(M,n)$. $\square$

Таким образом, степень $P_\mathfrak{a}(M,-)$ не зависит от выбора $\mathfrak{a}$. Обозначим эту степень через $d(M)$.

2.3.5 Предложение. *Пусть*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

– короткая точная последовательность конечно порожденных A-модулей.

1. $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$.

2. $P_\mathfrak{a}(M',-)$ и $P_\mathfrak{a}(M,-) - P_\mathfrak{a}(M'',-)$ имеют одинаковые степени и одинаковый старший коэффициент.

Д. На M' рассмотрим фильтрацию (F):

$$M'_n = M' \cap \mathfrak{a}^n M.$$

По лемме Артина-Риса она по существу $\mathfrak{a}$-адическая;

$$\begin{aligned} l(M/\mathfrak{a}^n M) &= l(M/\mathfrak{a}^n M + M') + l(\mathfrak{a}^n M + M'/\mathfrak{a}^n M) \\ &= l(M''/\mathfrak{a}^n M'') + l(M'/\mathfrak{a}^n M \cap M') \\ &= l(M''/\mathfrak{a}^n M'') + l(M'/M'_n), \end{aligned}$$

откуда $P_\mathfrak{a}(M,-) = P_\mathfrak{a}(M'',-) + P_F(M',-)$ (и в частности, $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$). Следовательно, $P_\mathfrak{a}(M,-) - P_\mathfrak{a}(M'',-)$ имеет одинаковые степень и старший коэффициент с $P_\mathfrak{a}(M',-)$.

2.3.5.1 Следствие. *Пусть M – конечно порожденный A-модуль, и $a \in A$ не является делителем нуля для M, т. е. $am \neq 0$ при $m \neq 0$. Тогда $d(M/aM) < d(M)$.*

Д. Последовательность

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot a} M \longrightarrow M/aM \longrightarrow 0$$

точная, поэтому $P_\mathfrak{a}(M,-)$ имеет те же степень и старший коэффициент, что и $P_\mathfrak{a}(M,-) - P_\mathfrak{a}(M/aM,-)$.

Функцией Самюэля модуля M называют $P_{\operatorname{Jac} A}(M,-)$.

2.4 Основная теорема теории размерности

Наряду с высотой идеала $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, равной $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$, мы будем пользоваться понятием *ковысоты* произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A: $\operatorname{coht}\mathfrak{a} = \dim(A/\mathfrak{a})$.

Пусть A – полулокальное нетерово кольцо, $\mathfrak{m} = \operatorname{Jac} A$. (Выбор обозначения объясняется тем, что на практике A обычно будет локальным.) С конечно порожденным A-модулем M связаны 3 величины:

$$\begin{aligned}
\dim M &:= \operatorname{coht}\operatorname{Ann} M;\\
s(M) &:= \inf\{n|\exists a_1,\dots,a_n \in \mathfrak{m} : l(M/a_1M + \dots + a_nM) < \infty\};\\
d(M) &= \deg P_{\mathfrak{m}}(M,-).
\end{aligned}$$

Цель: установить равенство этих трех величин.

Заметим, что $d(M)$ конечно по определению. То же можно сказать об $s(M)$, так как $l(M/\mathfrak{m}M) < \infty$, а $\mathfrak{m}$ конечно порожден. Про $\dim M$ мы этого a priori не знаем.

2.4.1 Лемма. *Пусть $a \in \mathfrak{m}$.*

1. $s(M/aM) \geq s(M) - 1$.

2. Предположим, что $a \notin \mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ такого, что $\operatorname{coht}\mathfrak{p} = \dim M$. Тогда $\dim(M/aM) \leq \dim M - 1$.

Д. Пусть $\bar{M} = M/aM$, $s = s(\bar{M})$.

1. Имеем

$$l(\bar{M}/\langle a_1,\dots,a_s\rangle) = l(M/\langle a, a_1,\dots,a_s\rangle),$$

откуда $s(M) \leq s + 1$.

2. Предположим, что $\dim(M/aM) \geq \dim M$. Это значит, что найдется $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}\bar{M}$ такой, что $\operatorname{coht}\mathfrak{p} = \dim M$. Имеем $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}\bar{M} \subset \operatorname{Supp} M$. С другой стороны, $a \in \operatorname{Ann}\bar{M} \subset \mathfrak{p}$, противоречие с условием.

2.4.2 Теорема. $\dim M = d(M) = s(M)$.

Д. Можно считать $\operatorname{Ann} M = 0$. (Так как всегда можно заменить A на $A/\operatorname{Ann} M$.) Тогда $\dim M = \dim A$, $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Spec} A$.) 1. Докажем, что $\dim M \leq d(M)$.

Применим индукцию по $d(M)$. Пусть $d(M) = 0$. Это означает, что $l(M/\mathfrak{m}^n)$ постоянна при больших n, откуда $\mathfrak{m}^n M = 0$ при $n \gg 0$ по лемме Накаямы. Следовательно, $\mathfrak{m}^n = 0$ и $\dim A = 0$.

Пусть $d(M) \geq 1$. Выберем минимальный $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Spec} A$ такой, что $\dim A/\mathfrak{p}_0 = \dim M$. Поскольку $\mathfrak{p}_0$ минимален в $\operatorname{Supp} M$, $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Ass} M$. Следовательно, найдется $N \subset M$ такой, что $N \simeq A/\mathfrak{p}_0$. Поскольку $d(N) \leq d(M)$, достаточно доказать $\dim N \leq d(N)$. (Ясно, что $\dim M = \dim N$.)

Пусть $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ – цепочка простых в A; нужно проверить $n \leq d(N)$. Это будет сделано индукцией по n.

При $n = 0$ утверждение очевидно. При $n > 0$ выберем $a \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$; тогда a – не делитель нуля для $N \simeq A/\mathfrak{p}_0$. Поскольку $\operatorname{Ann}(N/aN) = \mathfrak{p}_0 + \langle a\rangle \subset \mathfrak{p}_1$, ясно, что $\dim(N/aN) \geq n-1$. С другой стороны, $d(N/aN) \leq d(N) - 1$ по следствию 2.3.5.1. По индукционному предположению, $d(N/aN) \geq$

$\dim(N/aN)$, откуда $d(N) \geq n$. В частности, доказали, что $\dim M < \infty$.
2. Докажем, что $d(M) \leq s(M)$.

Пусть $s = s(M)$; $a_1, \dots, a_s \in \mathfrak{m}$ таковы, что $l(M/a_1M + \dots + a_sM) < \infty$. Положим $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, \rangle$. Осталось доказать, что $\operatorname{coht} \mathfrak{a} = 0$. (Отсюда будет следовать, что $\mathfrak{a}$ – идеал определения, и $d(M) \leq s$ по теореме Самюэля.)

Пусть $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Из $\operatorname{Ann} M = 0$ следует $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Имеем

$$(M/\mathfrak{a}M)_\mathfrak{p} \simeq M_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \neq 0$$

по лемме Накаямы. Таким образом, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M)$. С другой стороны, поскольку $l(M/\mathfrak{a}M) < \infty$, $\operatorname{Ass}(M/\mathfrak{a}M) \subset \operatorname{Max} A$, а тем самым и $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M) \subset \operatorname{Max} A$.

3. Докажем, что $s(M) \leq \dim M$.

Используем индукцию по $\dim M$. Если $\dim M = 0$, то $l(M) < \infty$ и $s(M) = 0$.

Пусть $\dim M \geq 1$. Обозначим через $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ все простые идеалы с $\dim A/\mathfrak{p}_i = \dim M$. Поскольку $\mathfrak{p}_i \notin \operatorname{Max} A$, имеем $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}_i$, откуда $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$.

Выберем $a \in \mathfrak{m}$, $a \notin \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$. По лемме 2.4.1 $s(M/aM) \geq s(M) - 1$ и $\dim(M/aM) \leq \dim M - 1$. Наконец, по индукционному предположению $s(M/aM) \leq \dim(M/aM)$.

2.4.2.1 Следствие. *Если A – полулокальное нетерово кольцо, то $\dim A < \infty$. А именно, $\dim A$ – наименьшее возможное число образующих идеала определения.* □

2.4.2.2 Следствие. *В нетеровом кольце убывающая цепочка простых идеалов обрывается.* □

2.4.3 Предложение. *Пусть A нетерово, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, n – натуральное число. Тогда 2 условия эквивалентны.*

1. $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq n$.

2. Существуют $a_1, \dots, a_n \in A$ такие, что $\mathfrak{p}$ – минимальный среди простых, содержащих $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Д. Отметим, что $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

2⇒1. $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ – единственный простой, содержащий $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ – идеал определения.

1⇒2. По следствию 2.4.2.1 найдутся $\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_n}{s_n} \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, порождающие идеал определения; очевидно, можно считать $s_1 = \dots = s_n = 1$. Из того, что $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ – единственный простой, содержащий $\frac{a_1}{1}, \dots, \frac{a_n}{1}$, следует, что $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий $a_1, \dots, a_n$.

Для дальнейшего удобно распространить понятие высоты на произвольный собственные идеалы: если $\mathfrak{a}$ – собственный идеал кольца, то его *высота* $\operatorname{ht} \mathfrak{a}$ – это минимум из высот простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.

2.4.3.1 Следствие. (теорема Крулля о главном идеале)

Пусть A нетерово, $a \in A$, $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий a. Тогда $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leq 1$. □

2.4.3.2 Замечание. В нетеровом кольце A множество делителей нуля

$$\bigcup_{\substack{a\in A\\ a\neq 0}} \operatorname{Ann} a = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} A} \mathfrak{p} \supset \bigcup_{\operatorname{ht}\mathfrak{p}=0} \mathfrak{p}.$$

Таким образом, если a – не делитель нуля, то в теореме Крулля $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$.

2.4.3.3 Следствие. *Пусть A нетерово, $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2$ – простые. Тогда существует бесконечно много $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ таких, что $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_2$.*

Д. Можно считать, что $\mathfrak{p}_0 = 0$ и что A локальное с максимальным идеалом $\mathfrak{p}_2$. По теореме Крулля

$$\forall a \in \mathfrak{p}_2 \exists \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A : \ a \in \mathfrak{q}, \ \operatorname{ht}\mathfrak{q} = 1,$$

откуда

$$\mathfrak{p}_2 = \bigcup_{\substack{\mathfrak{q}\in \operatorname{Spec} A\\ \operatorname{ht}\mathfrak{q}=1}} \mathfrak{q}.$$

Если их конечное число, по лемме об избежании простых 1.12.7 получаем $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}$ для одного из $\mathfrak{q}$, но $\operatorname{ht}\mathfrak{p}_2 \geq 2$.

Лекция 15

2.5 Размерность колец многочленов

Пусть A – кольцо, $B = A[X]$.

2.5.1 Лемма. *Пусть $\mathfrak{p}' \subsetneqq \mathfrak{p}''$ – простые идеалы в B такие, что $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}'' \cap A = \mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}[X] = \mathfrak{p} \cdot B$.*

Д. Профакторизовав по $\mathfrak{p}[X]$, можно считать, что $\mathfrak{p} = 0$, т. е. A – область. Пусть K – ее поле частных. Тогда $K = S^{-1}A$, где $S = A \setminus \{0\}$, и $S^{-1}B = K[X]$. Имеем $S^{-1}\mathfrak{p}' \subsetneqq S^{-1}\mathfrak{p}''$, поскольку операция локализации биективна на множестве простых идеалов, не пересекающих S.

Но $K[X]$ – кольцо главных идеалов, тем самым $\dim K[X] = 1$. Отсюда $S^{-1}\mathfrak{p}' = 0$ и $\mathfrak{p}' = 0$ (та же биекция).

2.5.1.1 Следствие. $\dim A + 1 \leq \dim B \leq 2\dim A + 1$.

Д. 1. Рассмотрим цепочку

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_r \subset A.$$

Тогда в B есть цепочка длиной $r + 1$:

$$\mathfrak{p}_0[X] \subsetneqq \mathfrak{p}_1[X] \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_r[X] \subsetneqq \mathfrak{p}_r[X] + X \cdot B.$$

2. Пусть в B есть цепочка длиной s:

$$\mathfrak{p}'_0 \subsetneqq \mathfrak{p}'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}'_s.$$

Рассмотрим цепочку

$$\mathfrak{p}'_0 \cap A \subset \mathfrak{p}'_1 \cap A \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_s \cap A.$$

По лемме любой простой идеал встречается в ней не более 2 раз, откуда $\frac{s+1}{2} - 1 \leq \dim A$.

2.5.2 Лемма. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *– идеал в* A*,* $\mathfrak{p}$ *– минимальный простой, содержащий* $\mathfrak{a}$*. Тогда* $\mathfrak{p}[X]$ *– минимальный простой, содержащий* $\mathfrak{a}[X]$*.*

Д. Пусть есть простой $\mathfrak{q}$ такой, что $\mathfrak{a}[X] \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}[X]$. При сужении до A получим $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}$. Из того, что $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий $\mathfrak{a}$, следует, что $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. По предыдущей лемме $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}[X]$.

2.5.2.1 Следствие. *Пусть* $\mathfrak{p} \cap A$ *– простой идеал,* A *–* <u>*нетерово*</u>*. Тогда* $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = \mathrm{ht}_B\, \mathfrak{p}[X]$.

Д. Ясно, что есть неравенство «$\le$». Обратно, пусть $n = \mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p}$. По предложению 2.4.3 существует $\mathfrak{a} \subset A$, порожденный n элементами, такой, что $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий $\mathfrak{a}$. Тогда по лемме $\mathfrak{p}[X]$ – минимальный простой, содержащий $\mathfrak{a}[X]$. Отсюда $\mathrm{ht}\, \mathfrak{p}[X] \le n$ по тому же предложению 2.4.3.

2.5.3 Теорема. *Если* A *нетерово, то* $\dim A[X_1, \dots, X_n] = \dim A + n$*.*

Д. Достаточно рассмотреть $n = 1$. Пусть в B есть цепочка простых идеалов

$$\mathfrak{p}'_0 \subsetneqq \mathfrak{p}'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}'_s.$$

Рассмотрим цепочку

$$\mathfrak{p}'_0 \cap A \subset \mathfrak{p}'_1 \cap A \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_s \cap A.$$

Если все включения строгие, $s \le \dim A < \dim A + 1$. В противном случае рассмотрим самое правое равенство

$$\mathfrak{p}'_j \cap A = \mathfrak{p}'_{j+1} \cap A = \mathfrak{p}.$$

По лемме 2.5.1 имеем $\mathfrak{p}'_j = \mathfrak{p}[X]$, откуда

$$j \le \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}[X]. \tag{2.2}$$

По предыдущему следствию имеем

$$\mathrm{ht}\, \mathfrak{p}[X] = \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}. \tag{2.3}$$

Поскольку правее $\mathfrak{p}$ равенств нет, имеем в A начинающуюся с $\mathfrak{p}$ цепочку длиной $s - j - 1$, т. е.

$$s - j - 1 \le \mathrm{coht}\, \mathfrak{p}. \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.3), (2.4) следует

$$s - 1 \le \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} + \mathrm{coht}\, \mathfrak{p} \le \dim A.$$

2.6 Размерность конечно порожденных областей

Пусть F – конечно порожденное расширение поля k. *Базисом трансцендентности* расширения F/k называется любой набор элементов $x_1, \dots, x_r \in F$ такой, что

1. $x_1, \ldots, x_r$ алгебраически независимы над k (то есть не существует ненулевого многочлена $F \in k[X_1, \ldots, X_r]$ такого, что $F(x_1, \ldots, x_r) = 0$);

2. Расширение $F/k(x_1, \ldots, x_r)$ алгебраическое.

Предполагается известным[1], что базис трансцендентности существует и число элементов в нем является инвариантом расширения. Это число называется *степенью трансцендентности* F/k и обозначается $\mathrm{tr.deg}_k F$.

Если A – k-алгебра конечного типа без делителей нуля, F – ее поле частных, полагаем

$$\mathrm{tr.deg}_k A := \mathrm{tr.deg}_k F.$$

2.6.1 Теорема. *Пусть k – поле, A – k-алгебра конечного типа без делителей нуля. Тогда* $\dim A = \mathrm{tr.deg}_k A$.

Д. По лемме Нетер о нормализации найдутся $x_1, \ldots, x_r \in A$, алгебраически независимые над k, такие, что A – целое расширение $k[x_1, \ldots, x_r]$. Получаем

$$\dim A = \dim k[x_1, \ldots, x_r] = r = \mathrm{tr.deg}_k k(x_1, \ldots, x_r) = \mathrm{tr.deg}_k A.$$

2.6.2 Предложение. (Усиленный вариант леммы о нормализации)

Пусть k – поле, A – конечно порожденная k-алгебра, $\mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subset A$ – идеалы. Тогда существуют $x_1, \ldots, x_r \in A$ такие, что:

1) $x_1, \ldots, x_r$ алгебраически независимы над k;

2) A цело над $k[x_1, \ldots, x_r]$

3) $\mathfrak{a}_i \cap k[x_1, \ldots, x_r] = \langle x_1, \ldots, x_{h(i)} \rangle$, $i = 1, \ldots, r$, где $h(i)$ – некоторые числа.

Д.

I. Редукция к случаю $A = k[Y_1, \ldots, Y_s]$.

Поскольку A конечно порождена, существует эпиморфизм $\varphi : k[Y_1, \ldots, Y_s] \to A$. Поскольку теорема верна для $k[Y_1, \ldots, Y_s]$, мы можем ее применить, в частности, к цепочке идеалов

$$\varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_1) \subset \cdots \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_k),$$

что даст существование $x_1', \ldots, x_r' \in k[Y_1, \ldots, Y_s]$ с тремя свойствами. Тогда $x_1 = \varphi(x'_{h(0)+1}), \ldots, x_{r-h(0)} = \varphi(x_r')$ – искомые.

II. $A = k[Y_1, \ldots, Y_s]$.

Используем индукцию по n.

<u>$n = 0$</u>. Достаточно положить $x_i = Y_i$.

<u>$n = 1$</u>. А. Допустим, что $\mathfrak{a}_1$ главный, $\mathfrak{a}_1 = \langle f \rangle$. Любой многочлен после подходящей замены переменных будет приведенным по одной из переменных, поэтому можно считать

$$f = Y_1^N + \text{ члены меньшей степени по } Y_1.$$

Тогда $x_1 = f$, $x_2 = Y_2$, $\ldots$, $x_s = Y_s$ – искомые.

Б. Индукция по s. Случай $s = 0$ тривиален, случай $s = 1$ только что рассмотрен (так как все идеалы главные). Будем считать $\mathfrak{a}_1 \neq 0$ (иначе

[1] См., например, [ZS, гл. II, §12]

подходят $x_i = Y_i$). Пусть $x_1 \in \mathfrak{a}_1$, $x_1 \neq 0$. Как и выше, можно считать, что x_1 приведенный по Y_1. Тогда A цело над $A' = k[x_1, Y_2, \dots, Y_s]$. При этом

$$\mathfrak{a}_1 \cap A' = \langle x_1 \rangle + (\mathfrak{a}_1 \cap k[Y_2, \dots, Y_s]) \cdot A'.$$

Применяя индукционное предположение к $k[Y_2, \dots, Y_s]$, выбираем $x_2, \dots, x_s$.

<u>n – любое</u>. По индукционному предположению существуют алгебраически независимые $x_1, \dots, x_r$ такие, что A цело над $k[x_1, \dots, x_r]$ и

$$\mathfrak{a}_i \cap k[x_1, \dots, x_r] = \langle x_1, \dots, x_{h(i)} \rangle \qquad (2.5)$$

при $i \leq n-1$.

Рассмотрим кольцо $k[x_{h(n-1)+1}, \dots, x_r]$ с идеалом $\mathfrak{a}_n \cap k[x_{h(n-1)+1}, \dots, x_r]$. Применяя уже проверенный случай $n = 1$, получаем, что существуют $x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r \in k[x_{h(n-1)+1}, \dots, x_r]$ такие, что:

$x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r$ алгебраически независимы;

$k[x_{h(n-1)+1}, \dots, x_r]$ цело над $k[x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r]$;

$\mathfrak{a}_n \cap k[x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r] = \langle x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_{h(n)} \rangle$.

Положим $x'_1 = x_1, \dots, x'_{h(n-1)} = x_{h(n-1)}$ и докажем что $x'_1, \dots, x'_r$ – искомые.

По транзитивности A цело над $k[x'_1, \dots, x'_r]$; следовательно, $x'_1, \dots, x'_r$ алгебраически независимы.

Равенство $\mathfrak{a}_i \cap k[x'_1, \dots, x'_r] = \langle x'_1, \dots, x'_{h(i)} \rangle$ проверим сперва для $i \leq n-1$. Включение $\supset$ очевидно. Включение в другую сторону выполняется, так как в противном случае найдется ненулевой $f \in \mathfrak{a}_i$ такой, что

$$f \in k[x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r] \subset k[x_{h(n-1)+1}, \dots, x_r],$$

что противоречит (2.5).

При $i = n$ включение $\supset$ очевидно; проверим оставшееся включение. Пусть $f \in \mathfrak{a}_n \cap k[x'_1, \dots, x'_r]$. Либо $f \in \langle x'_1, \dots, x'_{h(n-1)} \rangle$, и тогда все очевидно, либо $f \in k[x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_r]$, и тогда $\langle x'_{h(n-1)+1}, \dots, x'_{h(n)} \rangle$.

Лекция 16

2.6.3 Теорема. *Пусть k поле, A – конечно порожденная k-алгебра без делителей нуля, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Тогда $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{coht} \mathfrak{p} = \dim A$.*

Д. По предыдущему предложению существуют $x_1, \dots, x_r \in A$ такие, что A цело над $k[x_1, \dots, x_r]$ и $\mathfrak{p} \cap k[x_1, \dots, x_r] = \langle x_1, \dots, x_h \rangle$ при некотором h. С учетом теорем Коэна-Зайденберга имеем

$$\begin{aligned} \dim A &= \dim k[x_1, \dots, x_r] = r \\ \operatorname{coht} \mathfrak{p} &= \operatorname{coht} \mathfrak{p} \cap k[x_1, \dots, x_r] \\ \operatorname{ht} \mathfrak{p} &= \operatorname{ht} \mathfrak{p} \cap k[x_1, \dots, x_r]. \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что $A = k[x_1, \dots, x_r]$, $\mathfrak{p} = \langle x_1, \dots, x_h \rangle$. Имеем

$$\operatorname{coht} \mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p} = \dim k[x_{h+1}, \dots, x_r] = r - h$$

и $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq h$, поскольку есть цепочка

$$0 \subset \langle x_1 \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle \subset \dots \subset \langle x_1, \dots, x_h \rangle.$$

2.6.3.1 Следствие. *В конечно порожденной k-алгебре без делителей нуля все максимальные*[2] *цепочки простых идеалов имеют одну и ту же длину.*

Д. Пусть $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_r$ – максимальная. Очевидно, $\mathfrak{p}_0 = 0$, $\mathfrak{p}_r \in \operatorname{Max} A$, т. е. $\operatorname{coht} \mathfrak{p}_r = 0$.

Имеем $\operatorname{ht} \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i = 1$, и

$$\begin{aligned}\operatorname{coht} \mathfrak{p}_{i+1} &= \operatorname{coht} \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i \\ &= \dim A/\mathfrak{p}_i - \operatorname{ht} \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i \\ &= \dim A/\mathfrak{p}_i - 1 \\ &= \operatorname{coht} \mathfrak{p}_i - 1\end{aligned}$$

По индукции получаем $r = \operatorname{coht} \mathfrak{p}_0 = \dim A$.

2.7 Системы параметров

В этом параграфе A – локальное нетерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, $\dim A = r$. В этом случае идеал определения – это $\mathfrak{m}$-примарный идеал, и у него не менее r образующих.

Если $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ – $\mathfrak{m}$-примарный идеал, то говорят, что $a_1, \ldots, a_r$ – *система параметров*.

2.7.1 Лемма. *Пусть $a_1, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}$, причем $a_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_d + \mathfrak{m}^2$ – базис $A/\mathfrak{m}$-пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Тогда $\langle a_1, \ldots, a_d \rangle = \mathfrak{m}$.*

Д. К $\mathfrak{m}/\langle a_1, \ldots, a_d \rangle$ применить лемму Накаямы.

2.7.1.1 Следствие. $\dim A \le \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. $\square$

Если $\dim A = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, кольцо A называется *регулярным.* При этом если $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \mathfrak{m}$, то $a_1, \ldots, a_r$ – *регулярная система параметров.*

2.7.2 Теорема. *Пусть A – локальное нетерово, $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал, $\dim A = r$.*

1. Для любых $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{m}$ имеем $\dim A/\langle a_1, \ldots, a_s \rangle \ge r - s$.

2. Если $a_1, \ldots, a_r$ – система параметров, $s \le r$, то $\dim A/\langle a_1, \ldots, a_s \rangle = r - s$.

3. Можно выбрать такую систему параметров $a_1, \ldots, a_r$, что

$$\forall s \le r \forall i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, r\} : \operatorname{ht}\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_s} \rangle = s.$$

Д. Положим $\bar{A} = A/\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$, $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$.

1. Пусть $\dim \bar{A} = t$. Тогда по предложению 2.4.3 найдутся $b_1, \ldots, b_t \in \mathfrak{m}$ такие, что $\bar{\mathfrak{m}}$ – минимальный простой идеал, содержащий классы этих элементов по модулю $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$. Иначе говоря, $\mathfrak{m}$ – минимальный простой, содержащий $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$, откуда $\dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{m} \le s + t$.

2. $\bar{\mathfrak{m}}$ – минимальный простой, содержащий классы элементов $a_{s+1}, \ldots, a_r$, откуда $\dim \bar{A} \le r - s$.

[2] которые нельзя удлинить, добавляя идеалы слева, справа или внутрь

3. При $r \leq 1$ утверждение очевидно. (Любая система параметров годится.) Пусть $r > 1$.

Обозначим через $\mathfrak{p}_{01}, \ldots, \mathfrak{p}_{0e_0}$ все простые идеалы высоты 0. По лемме об избежании простых 1.12.7 имеем

$$\mathfrak{p}_{01} \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_{0e_0} \neq \mathfrak{m};$$

выберем $a_1 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup \mathfrak{p}_{0i}$. Ясно, что $\operatorname{ht}\langle a_1 \rangle = 1$. Пусть $\mathfrak{p}_{11}, \ldots, \mathfrak{p}_{1e_1}$ – все минимальные простые надидеалы $\langle a_1 \rangle$ (или, что то же самое, все простые надидеалы $\langle a_1 \rangle$ высоты 1). Выберем

$$a_2 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup \mathfrak{p}_{0i} \setminus \bigcup \mathfrak{p}_{1i};$$

это множество непусто ввиду $\operatorname{ht} \mathfrak{m} = r \geq 2$. Ясно, что $\operatorname{ht}\langle a_2 \rangle = 1$, $\operatorname{ht}\langle a_1, a_2 \rangle = 2$.

Если $r \geq 3$, то выберем в качестве a_3 любой элемент $\mathfrak{m}$, не лежащий в минимальных простых надидеалах каждого из идеалов 0, $\langle a_1 \rangle$, $\langle a_2 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle$. Аналогично при необходимости строятся $a_4, a_5, \ldots$

2.7.3 Теорема. *Пусть A – регулярное с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, $\dim A = r$. Пусть $a_1, \ldots, a_i \in \mathfrak{m}$. Тогда следующие 3 утверждения эквивалентны.*

1. $a_1, \ldots, a_i$ – часть регулярной системы параметров A.

2. $a_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_i + \mathfrak{m}^2$ линейно независимы над $A/\mathfrak{m}$.

3. $A/\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ – $(r-i)$-мерное регулярное.

Д. 1⇒2. Если $a_1, \ldots, a_r$ – регулярная система параметров, то $a_1 + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_r + \mathfrak{m}^2$ – базис $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

1⇒3. Размерность считается по предыдущей теореме.

3⇒1. $\mathfrak{m}/\langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ порождается классами некоторых $b_1, \ldots, b_{r-i}$. Отсюда $\mathfrak{m} = \langle a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_{r-i} \rangle$.

2⇒1. Дополним до базиса какими-нибудь элементами $a_{i+1} + \mathfrak{m}^2, \ldots, a_r + \mathfrak{m}^2$. Тогда по лемме 2.7.1 $\langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \mathfrak{m}$.

2.7.4 Теорема. *Пусть A – регулярное с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, $\dim A = d$, $k = A/\mathfrak{m}$. Тогда $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A \simeq k[X_1, \ldots, X_d]$.*

Д. Поскольку $\mathfrak{m}$ имеет d образующих, $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A$ имеет d образующих как k-алгебра. Следовательно, $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A \simeq k[X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ – однородный идеал. Если $\mathfrak{a} \neq 0$, то $\exists f \in \mathfrak{a} : \deg f = r \geq 0$. При $n > r$ имеем

$$\begin{aligned} l((k[X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{a})_n) &\leq l((k[X_1, \ldots, X_d]/\langle f \rangle)_n) \\ &= \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n-r+d-1}{d-1}. \end{aligned}$$

Это многочлен от n степени $d-2$. Следовательно, $\deg P_{\mathfrak{m}}(A, -) \leq d-1$, противоречие.

2.7.4.1 Следствие. *Регулярное локальное кольцо – область целостности.*

Д. Пусть $x, y \in A \setminus \{0\}$, $xy = 0$. Поскольку $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$, найдутся i, j такие, что $x \in \mathfrak{m}^i \setminus \mathfrak{m}^{i+1}$, $y \in \mathfrak{m}^j \setminus \mathfrak{m}^{j+1}$. Пусть $\bar{x}$ – класс x в $(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A)_i$, $\bar{y}$ – класс y в $(\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} A)_j$. Имеем $\bar{x} \cdot \bar{y} \neq 0$, откуда $\overline{xy} \neq 0$ и $xy \neq 0$.