ТЕОРЕМА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Запись Марины Князевой

Теорема 10.1. ***(Richter-Gebert)*** *Для любого примарного полуалгебраического множества* $\mathfrak{A}$ *найдется выпуклый четырехмерный многогранник* K*, пространство реализаций которого стабильно эквивалентно* $\mathfrak{A}$*.*

Мы опишем идею доказательства и основные приемы.

Шаг 1: Заменим множество $\mathfrak{A}$ на ему стабильно эквивалентное с нормальной формой Шора (лекция 8), т.е. задаваемое простыми полиномами и неравенствами:

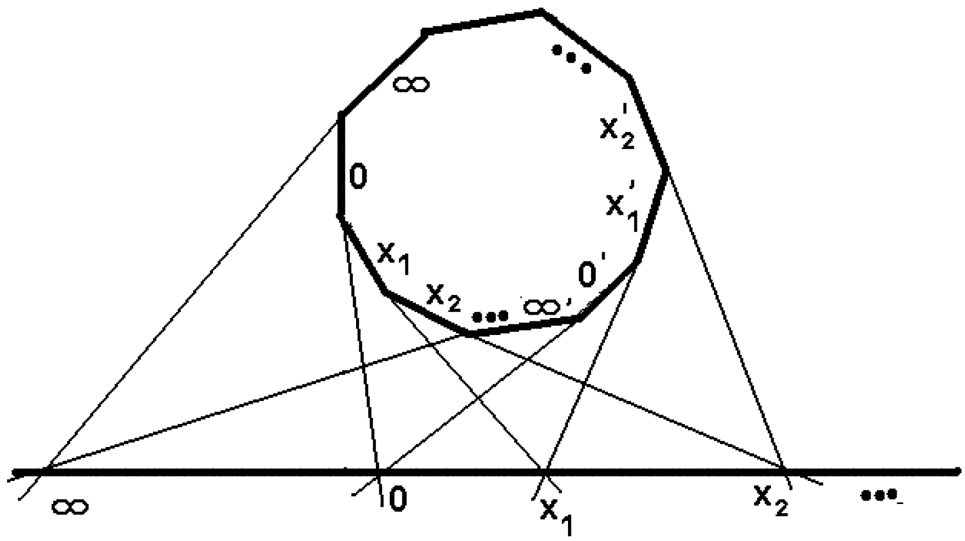
$$(*)\begin{cases} x_i \cdot x_j = x_k, \\ x_i + x_j = x_k, \\ 1 = x_1 < x_2 < ... < x_n. \end{cases}$$

.

Шаг 2: Четырехмерный многогранник K строится явно с помощью большого числа специальных приемов. Он будет обладать следующими ключевыми свойствами:

- Любая комбинаторная реализация K содержит плоскую грань F, в которой следующим образом закодированы все равенства и неравенства (*):
  Эта грань - $2(n+2)$-угольник (см. рисунок). Стороны разбиты на пары противоположных сторон: ∞ и ∞', 0 и $0'$, x_1 и x_1', x_2 и x_2', ..., x_n и x_n'. Пересечения продолжений пар лежат на одной прямой - проективной шкале, задаваемой точками $\infty, 0$ и $1 = x_1$. При этом проективные координаты точек x_1, x_2 ... x_n удовлетворяют системе (*).

Рисунок 10.2.



- Каждой точке $(x_1, x_2 \dots x_n)$ из $\mathfrak{A}$ соответствует комбинаторная реализация K.
- Зафиксируем F. Множество комбинаторных реализаций K, содержащих грань F, непусто и задается системой линейных уравнений и неравенств (в частности, оно стягиваемо). Следовательно, пространство реализаций K стабильно эквивалентно множеству $\mathfrak{A}$.

Чтобы построить K, Richter-Gebert пользуется полезными (не только в рамках доказательства этой теоремы) приемами.

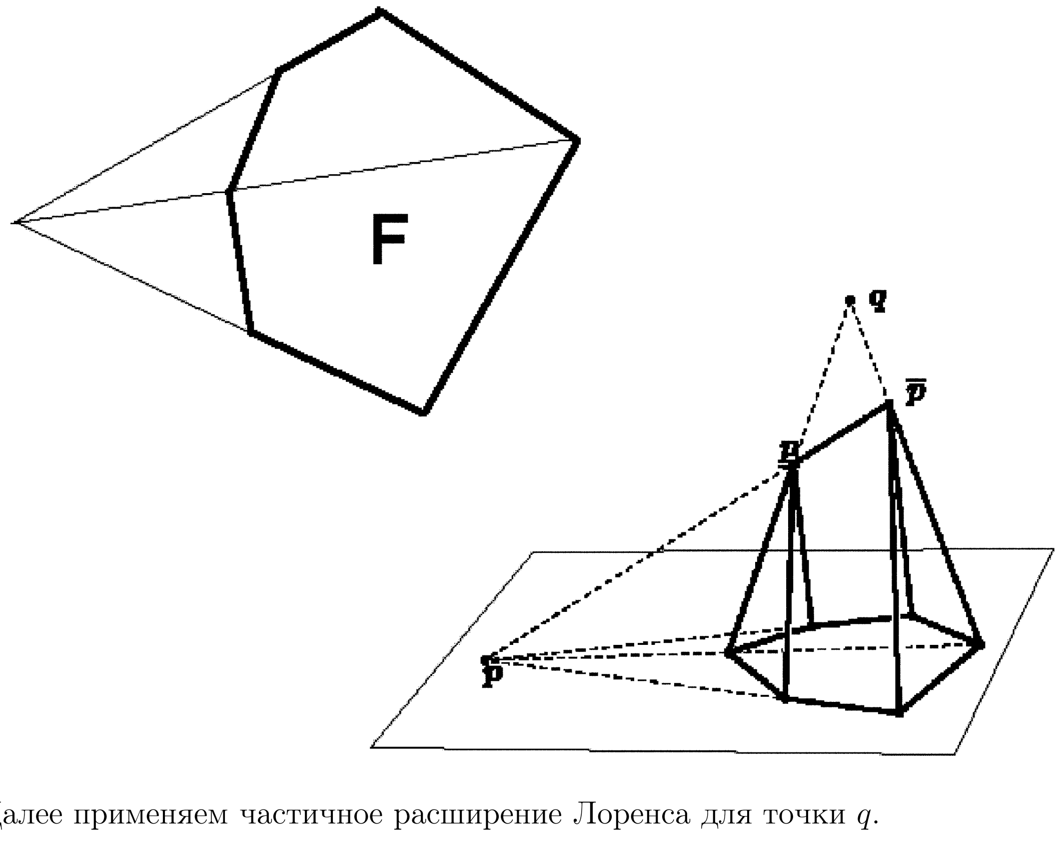
Прием 1.
Смысл:
(Вспомним, что мы делали в конструкции фон Штаудта - проводили много раз прямые либо через произвольные точки, либо через точки, полученные в результате пересечений. Полученными условиями заставляли проективные координаты точек удовлетворять алгебраическим уравнениям.) Надо уметь "заставить" три прямые проходить через одну точку.

Реализация: Конструкция 4-многогранника с непредписываемой 2-гранью.

Грань G - 6-угольник, у которого 2 стороны и диагональ пересекаются в одной точке. Построим так называемый tent, опирающийся на две стороны

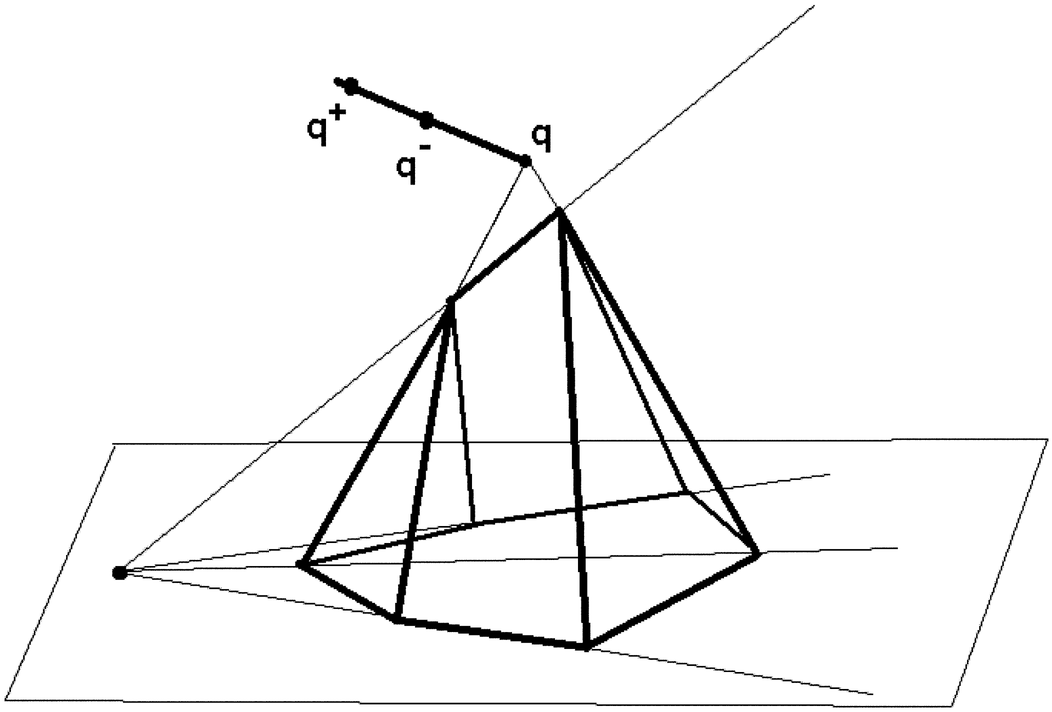
G (см. рисунок). Боковые ребра, опирающиеся на эту диагональ, лежат в одной плоскости, поэтому их продолжения пересекаются в точке q.

Рисунок 10.3.



Далее применяем частичное расширение Лоренса для точки q.

Рисунок 10.4.



Получим четырехмерный многогранник L. Как обычно, с помощью этого приема удалось перейти от точечной конфигурации к выпуклому многограннику, и при этом никакая комбинаторная информация о точечной конфигурации не утратилась.

Поэтому любая комбинаторная реализация L обладает тем же свойством: соответствующие три прямые проходят через одну точку.

Прием 2.

Смысл: Собрать в один многогранник (а точнее, в одну грань многогранника) все необходимые условия на прямые.

Реализация:

Определение 10.5. Связная сумма. Пусть K и L - многогранники в $\mathbb{R}^4$; пусть их гиперграни $F \subset K$ и $G \subset L$ проективно эквивалентны. Тогда связной суммой этих многогранников по граням F, G называется многогранник $K\#_{F,G}L$, который получается из исходных многогранников (после подходящего проективного преобразования) склеиванием по этим граням.

Проективным преобразованием можно добиться выпуклости полученного.

Пространства реализаций при связной сумме склеиаются причудливо, особенно если склеивать по непредписываемой грани.

После склейки грани F и G лежат в $\mathbb{R}^3$, но при переходе к комбинаторно эквивалентному многограннику они могут вылезти из $\mathbb{R}^3$. Поэтому для сохранения при комбинатороной эквивалентности свойства "быть связной суммой" грани F и G должны быть *вынужденно плоскими*:

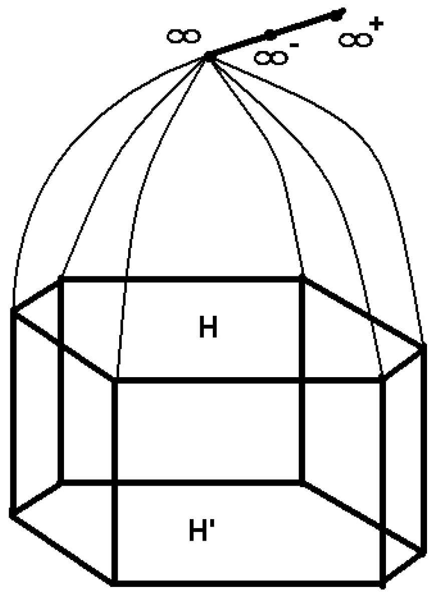
Определение 10.6. Трехмерный многогранник называется вынужденно плоским, если любое вложение $\partial K \subset \mathbb{R}^4$ лежит в одной 3-плоскости.

Например, пирамида, призма, тент - вынужденно плоские. Именно по ним строятся связные суммы в доказательстве.

Для собирания воедино всей комбинаторной информации используются так называемые передатчики.

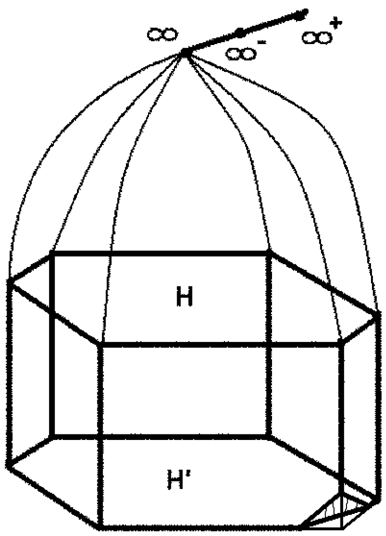
Простой передатчик. Две его грани H и H' всегда проективно эквивалентны. Взять призму и расширить по Лоренсу точку пересечения продолжений боковых сторон.

Рисунок 10.7.



Забывающий передатчик. То же самое, но до применения расширения Лоренса надо отрезать уголок.

Рисунок 10.8.



Конфигурация прямых, порожденная H, проективно эквивалентна конфигурации прямых, порожденной H', у которой выкинули одну прямую.

Дальнейшая идея доказательства такова: сначала с помощью тентов кодируются элементарные комбинаторные условия, затем с помощью связной суммы передатчиков они "собираются" в одной грани F искомого четырехмерного многогранника K. $\square$

E-mail address: `panina@iias.spb.su`