ЛЕКЦИЯ 4. СООТНОШЕНИЯ ДЕНА - СОММЕРВИЛЯ. f- И h- ВЕКТОРЫ. UPPER BOUND THEOREM. ТЕОРЕМА КАЛАИ О КОМБИНАТОРИКЕ ПРОСТОГО МНОГОГРАННИКА.

Запись Марины Князевой

Определение 4.1. Пусть K - d-мерный многогранник; через f_k обозначим число его k-мерных граней (сам многогранник K считаем своей гранью). Тогда вектор $f = (f_0, f_1, ..., f_d)$ называется f-вектором.

$f(t) := f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + ... + f_d t^d$ называется f-полиномом многогранника K.

Рассмотрим полином $h(t) = f(t-1)$.

Его коэффициенты h_i и числа f_i связаны соотношениями:

$h_k = \sum_i f_i C_i^k (-1)^{i-k}$;

$f_k = \sum_i h_i C_i^k$

В частности, $h_0 = f_0 - f_1 + f_2 + ... + f_d$. Заметим, что число f_i является **положительной** комбинацией чисел h_i, и числа h_i и f_i определяют друг друга.

Определение 4.2. Вектор $(h_0, h_1, ..., h_d)$ называется h- вектором.

Теорема 4.3. ***Соотношение Дена - Соммервиля***

Для простого многогранника $h_k = h_{d-k}$

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^d$ зададим направление $\mathbf{z}$ "вверх"общего положения (так, чтобы никакое ребро не оказалось горизонтальным). Говорим, что *вершина X имеет индекс k*, если от нее идет вниз ровно k ребер (тогда вверх - $d-k$ ребер). Рассмотрим число $B_k(K, \mathbf{z})$ - число вершин многогранника K с индексом k. Выразим f_k через $B_k(K, \mathbf{z})$.

Закодируем каждую грань многогранника своей наивысшей точкой. Тогда если вершина X имеет индекс i, то число k-граней, для которых она является самой высокой, есть C_i^k. Поэтому $f_k = \sum_i B_i(K, \mathbf{z}) C_i^k$. С другой стороны, $f_k = \sum_i h_i C_i^k$. Следовательно, $B_i(K, \mathbf{z}) = h_i$.

Таким образом, числа h_i имеют простой геометрический смысл: это число вершин индекса k, причем оно не зависит от выбора направления $\mathbf{z}$.

Рассмотрим теперь направление $(-\mathbf{z})$. Тогда

$h_k = \#$ (вершины индекса k относительно $\mathbf{z}$) $=$

$\#$ (вершины индекса $d-k$ относительно $-\mathbf{z}$) $= h_{d-k}$ $\square$

Следствие 4.4. *Формула Эйлера*

$h_0 = h_d \;\Rightarrow\; f_0 - f_1 + f_2 - ... = 1.$

Идея доказательства: индукция по размерности. Отрезание вершины, ребра или грани не меняет значение суммы . Совокупностью отрезаний любой многогранник можно сделать простым (для этого нужно отрезать плоскостями общего положения все собственные грани кроме гиперграней). □

Теорема 4.5. ***Upper Bound Theorem (McMullen)***

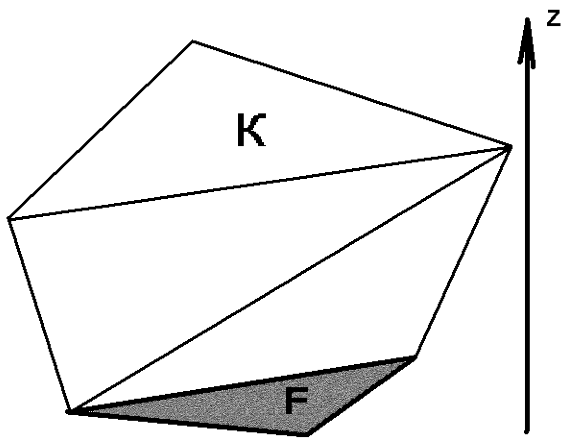
- *Максимальное число граней при фиксированном числе вершин n достигается на циклическом многограннике (а также на любом другом, у которого каждые $[d/2]$ вершины порождают грань. Такие называются* ***смежностными (neighborly)****).*
- *Полярное утверждение (именно его удобнее доказывать): Максимальное число граней при фиксированном числе гиперграней n достигается на двойственном к циклическому многограннику (а также на любом другом, у которого каждые $[d/2]$ гиперграней имеют непустое пересечение, т.е. на* ***полярных к neighborly****).*

Доказательство.
Докажем ряд лемм.

Лемма 4.6. *Если F - гипергрань K и $k < [d/2]$, то $h_k(F) \leq h_k(K)$.*
При этом на полярных к neighborly здесь всегда равенство.

Доказательство леммы. Положим многогранник K гранью F вниз (относительно выбранного направления вверх $\mathbf{z}$) и проследим за индексами вершин.

Рисунок 4.7.



Если вершина X имеет индекс k относительно грани F, то X имеет индекс k относительно многогранника K. Отсюда следует неравенство.

Докажем равенство для полярно-смежностных многогранников от противного. Пусть у многогранника K нашлась вершина не из гиперграни F, у которой индекс равен k, т.е. от нее вниз идет k ребер, а вверх - $d-k$ ребер. Натянем верхние ребра грань G. Размерность G равна $d-k$. То есть G - пересечение k гиперграней. По построению

$$G\bigcap F = \bigcap (k+1)\text{гиперграней} = \varnothing$$

Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Для простого d -мерного многогранника K с n гипергранями верно*

$$h_{k+1}(K) \leq \frac{n-d+k}{k+1}h_k(K).$$

Доказательство леммы. Назовем k *-инцидентностью* ситуацию "X - вершина K с индексом k относительно гиперграни F". Обозначим через I_k число k-инцидентностей. С одной стороны,

$$I_k = \sum_F h_k(F) \leq nh_k(K)$$

(неравенство - из предыдущей леммы).

С другой стороны, I_k можно посчитать по вершинам. Вершина X имеет индекс k в некоторой гиперграни в двух случаях:

- k ребер вниз, $d-k$ вверх;
- $k+1$ ребро вниз, $d-k-1$ вверх.

Гипергрань, примыкающая к X, натягивается на $d-1$ ребро, примыкающее к X (т.е. одно ребро выкидываем). В первом случае выкидываем одно из верхних ребер, во втором - одно из нижних. Поэтому

$$I_k = (d-k)h_k(K) + (k+1)h_{k+1}(K).$$

Объединяя полученные выражения для I_k, получаем требуемое. Лемма доказана.

Следствие 4.9. *Для простого многогранника при $k \leq [d/2]$ верно*

$h_k(K) \leq C^k_{n-d+k-1}$, причем равенство достигается на полярных к смежностным многогранниках.

Мы доказали, что числа h_k - максимальные для многогранников, полярных к смежностным (при фиксированном числе гиперграней). Поскольку числа f_i являются положительной комбинацией чисел h_i, получаем требуемое. □

Напомним, что в общем случае многогранник K не восстанавливается по своему графу ребер $\Gamma(K)$. Исключения: $d=3$ и простые многогранники:

Теорема 4.10. ***G. Kalai*** *Для простого K граф $\Gamma(K)$ однозначно восстанавливает комбинаторную структуру K.*

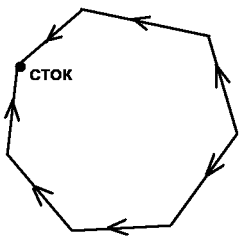
Иначе говоря, для простых многогранников $\Gamma(K) = \Gamma(K') \Rightarrow K$ комбинаторно эквивалентен K'.

Доказательство. Заметим, что $\Gamma(K)$ - d-регулярен, т.е. любая его вершина имеет валентность d.

Рассмотрим ориентации $\Gamma(K)$ без циклов.

Ориентацию $\Gamma(K)$ называем **хорошей**, если любая грань K имеет ровно 1 **сток** (точку, куда ребра только входят).

Рисунок 4.11.



Лемма 4.12. *Набор вершин $\{v_i\}_I$ порождает k-грань K.* $\Leftrightarrow$

(1) $\Gamma(\{v_i\}_I)$ - *k-регулярный;*

(2) $\{v_i\}_I$ - ***начальное множество*** *для некоторой хорошей ориентации (множество, из которого стрелки только выходят).*

Доказательство леммы. $\Rightarrow$ 1) - следствие простоты. 2) - если набор породает грань F, то поместив ее "вниз", получим хорошую ориентацию, направив стрелки "вверх".

$\Leftarrow$ В множестве $\{v_i\}_I$ существует хотя бы 1 сток X. Пусть F - грань K, натянутая на k стрелок, приходящих в X. Докажем, что $F = Conv(\{v_i\})$.

Легко показать (пользуясь единственностью стока), что $F \subset \{v_i\}$. Получили k-регулярный подграф (граф грани F) другого k-регулярного связного графа. Они обязаны совпадать. Лемма доказана.

Осталась проблема: пока невозможно определить, является ли данная ориентация хорошей, т.к. не известно, какие вершины образуют грань.

Пусть есть ориентация без циклов.

Вычислим число пар #(грань F, сток грани F). С одной стороны

$$\text{число граней K} = f \leq \#(\text{грань F, сток грани F}),$$

причем равенство достигается в точности на хороших ориентациях. С другой стороны, пусть вершина X имеет индекс k , т.е. в нее входит k стрелок. На эти k ребер можно 2^k способами натягивать грани, содержащие X в качестве стока. Поэтому

$$\#(\text{грань, сток}) = \sum 2^k h_k^{Or},$$

где h_k^{Or} - число вершин индекса k относительно ориентации Or.

Получили $\sum 2^k h_k^{Or} \geq f(K)$. Поэтому для определения хороших ориентаций, нужно перебрать все возможные ориентации без циклов, вычислить $\sum 2^k h_k^{Or}$ и найти минимальное значение. Ориентации с минимальным значением - и есть хорошие. $\square$

E-mail address: `panina@iias.spb.su`