КОНФИГУРАЦИИ ТОЧЕК. ЗАВИСИМОСТИ. ЗНАЧЕНИЯ.

Запись Марины Князевой

Конфигурация точек - упорядоченный набор точек, аффинно порождающий все пространство; могут появляться и кратные точки. Необходимо описать комбинаторику этого множества точек.

Конфигурацию точек $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ запишем в виде матрицы $\mathbf{X} = ((\mathbf{x}_1)...(\mathbf{x}_n))$; в ней n столбцов и d строк.

Определение 5.1. Аффинными зависимостями конфигурации точек $\mathbf{X}$ называется элемент множества $a - Dep(\mathbf{X}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : X\mathbf{a} = 0, \mathbf{1a} = 0\}$

Пусть $\mathbf{a} \in a - Dep(\mathbf{X})$, тогда $\sum_i a_i \mathbf{x}_i = 0, \sum_i a_i = 0$. Соберем положительные слагаемые с одной стороны знака равенства, а отрицательные - с другой:

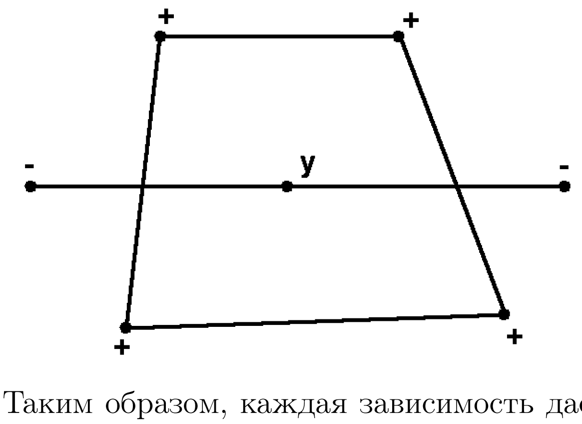
$$\sum_{a_i>0} a_i \mathbf{x}_i = \sum_{a_j<0} (-a_j)\mathbf{x}_j = \mathbf{y}$$

. Можем считать, что $\sum_{a_i>0} a_i = 1$, тогда и $\sum_{a_j<0}(-a_j) = 1$.

Т.к. $\mathbf{y} = \sum_{a_i>0} a_i \mathbf{x}_i$ и $\sum_{a_i>0} a_i = 1$, то $\mathbf{y} \in Conv$(положительных точек).

С другой стороны, $\mathbf{y} = \sum_{a_j<0}(-a_j)\mathbf{x}_j$ и $\sum_{a_j<0}(-a_j) = 1$, значит
$\mathbf{y} \in Conv$(отрицательных точек).

Рисунок 5.2.



Таким образом, каждая зависимость дает точку, лежащую в пересечении двух многогранников, натянутых на два дизъюнктных подмножества $\mathbf{X}$.

Определение 5.3. Отображение $Sign : a - Dep \longrightarrow (+, -, 0, ...)$;
$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \longrightarrow (sign\ a_1, ..., sign\ a_n)$.

Определение 5.4. Аффинный вектор значений конфигурации $\mathbf{X}$ есть элемент $a - Val(\mathbf{X}) = \{(\mathbf{zX} - r\mathbf{1}) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}\}$; иными словами, это векторы, составленные из значений линейных функций $l(X) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ на точках конфигурации.

Применим отображение Sign к аффинному вектору значений:
$a - Val(\mathbf{X}) \longrightarrow (+, -, 0, ...)$.
Геометрически это означает, что проводится гиперплоскость, которая разделяет точки на '+' (лежащие с одной стороны гиперплоскости),
'**-**'(лежащие с другой стороны) и '**0**' (лежащие на ней).

Линеаризуем ситуацию приписыванием единицы: $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$:
$\mathbf{X} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}$
(Обозначим через $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}$.)
Таким образом, от аффинной конфигурации точек переходим к конфигурации векторов.
Дадим определения для произвольной конфигурации векторов.

Определение 5.5. Множеством зависимостей конфигурации векторов $\mathbf{X}'$ называется $Dep(\mathbf{X}') = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{X'a} = 0\}$.

Определение 5.6. Множеством векторов значений называется $Val(\mathbf{X}') = \{\mathbf{z}\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{d+1}\}$.

Если конфигурация $\mathbf{X}'$ получена из аффинной $\mathbf{X}$, то легко видеть, что $Dep(\mathbf{X}') = a - Dep(\mathbf{X})$, $Val(\mathbf{X}') = a - Val(\mathbf{X})$.

Из аффинной конфигурации точек получаются ациклические конфигурации векторов:

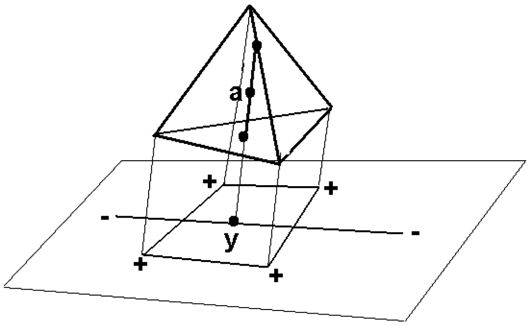
Определение 5.7. Ациклической конфигурацией векторов называется такая конфигурация векторов, которая характеризуется одной из трех характеристик:
(1) концы векторов лежат в открытом полупространстве;
(2) не существует элемента в $Dep(\mathbf{X}') > 0$;
(3) существует положительный элемент $Val(\mathbf{X}')$.

На множестве векторных зависимостей введем частичный порядок: говорим, что $a \leq a'$, если ($a'_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$). Выделим минимальные (ненулевые) зависимости (с максимальным числом нулей):
$a - Dep(\mathbf{X}) \supset min\ (a - Dep(\mathbf{X}))$.

Теорема 5.8. *Всякая $\boldsymbol{a} \in a - Dep(\boldsymbol{X})$ представляется в виде положительной линейной комбинации минимальных зависимостей, причем слагаемые $\leq \boldsymbol{a}$.*

Доказательство. Нужно заметить, что соответствие между y и $\mathbf{a}$ неоднозначно: y можно по-разному представить в виде комбинации '+' точек. Чтобы это соответствие было однозначным, необходимо, чтобы '+' точки образовывали симплекс. Для этого нужно увеличить размерность пространства. Представим '+' точки как проекцию вершин некоторого симплекса. Тогда зависимости $\mathbf{a}$ соотвествует точка этого симплекса. Представим ее (см. рис.) как выпуклую комбинацию точек, лежащих на границе симплекса (им соответствуют зависимости с большим числом нулей). После этого спустимся вниз и повторим маневр.

Рисунок 5.9.



$\square$

Теорема 5.10. *Пусть $v \in a - Val(\boldsymbol{X})$, тогда v - линейная комбинация минимальных векторов значений.*

$\square$

Теорема 5.11. *Пусть $\boldsymbol{V}$ - векторная конфигурация в $\mathbb{R}^{d+1}$. Тогда подпространства $Val(\boldsymbol{V})$ и $Dep(\boldsymbol{V})$ - ортогональные дополнения друг друга.*

Доказательство.
Проверим ортогональность подпространств: $(\mathbf{zX})\mathbf{a} = 0$, т.к. $(\mathbf{Xa}) = 0$.
Осталось проверить размерности:
$dim\ Dep(\mathbf{X}) = n - d - 1$;
$dim\ Val(\mathbf{X}) = d + 1$. $\square$

Определение 5.12. Конфигурации $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ комбинаторно эквивалентны, если выполнено одно из двух равносильных условий:

(1) $sign(Dep(\mathbf{X})) = sign(Dep(\mathbf{X}'))$
(2) $sign(Val(\mathbf{X})) = sign(Val(\mathbf{X}'))$.

Замечание 5.13.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Dep(X)} & sign \mapsto & \mathbf{Vectors} & min \to & \mathbf{curcuits} \\ \perp\updownarrow & & \perp\updownarrow & & \\ \mathbf{Val(X)} & sign \mapsto & \mathbf{Covectors} & min \to & \mathbf{cocircuits} \end{array}$$

1) **Dep(X)** и **Val(X)** определяют друг друга, т.к. являются ортогональными дополнениями.

2) $sign(Dep(\mathbf{X})) =$ **Vectors** и $sign(Val(\mathbf{X})) =$ **Covectors** тоже определяют друг друга - они ортогональны в следующем смысле:

ортогональными считаем следующие векторы:

те пары, у которых для всех i $a_i \cdot a'_i = 0 : (++--0000) \perp (0000++++)$ и

те пары, у которых $\exists i, j : a_i \cdot a'_i = -a_j \cdot a'_j \neq 0$: $(++...) \perp (+-...)$

$(+-...) \perp (--...)$.

3) $min\ Vectors(\mathbf{X}) = circuits(\mathbf{X})$ и $min\ Covectors(\mathbf{X}) = cocircuits(\mathbf{X})$ восстанавливают соответственно $Vectors(\mathbf{X})$ и $Covectors(\mathbf{X})$ с помощью всевозможных допустимых сумм (можно складывать только некоторые вектора):

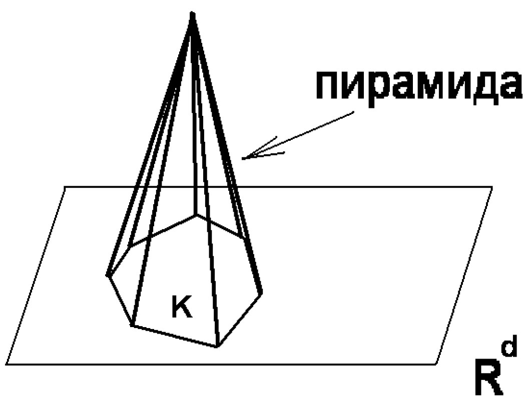
'+' + '+' = '+'

'**0**' + '+' = '+'

'+' + '**-**' - сложение запрещено.

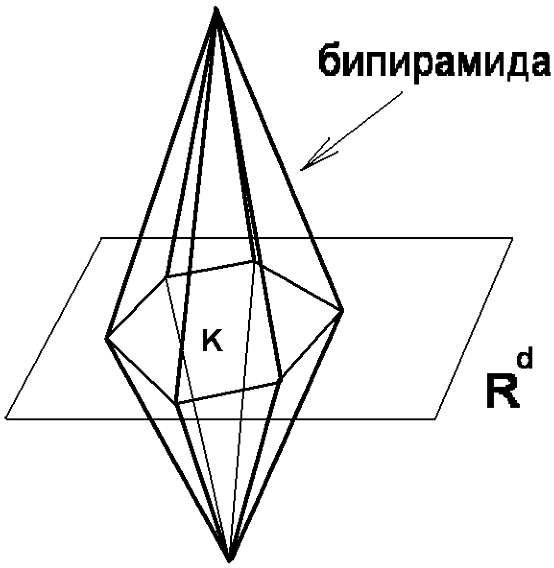
Определение 5.14. Пирамида над многогранником K

Рисунок 5.15.



Определение 5.16. Бипирамида над K

Рисунок 5.17.



(Отрезок, соединяющий верхнюю и нижнюю вершины, пересекает внутренность K.)

Задача 5.18. *Для конфигурации* $\boldsymbol{X}$ *известны все циклы или коциклы. Перевести на их язык следующие предложения:*

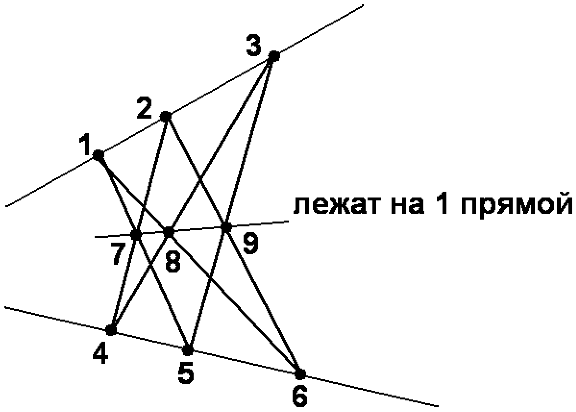
(1) $\boldsymbol{X}$ - *вершины выпуклого многогранника;*
(2) $\boldsymbol{X}$ - *вершины симплициального многогранника;*
(3) *как распознать его грани?*
(4) $\boldsymbol{X}$ - *множество вершин пирамиды;*
(5) $\boldsymbol{X}$ - *множество вершин бипирамиды.*

Ответы.
1) $\Leftrightarrow$ не существует аффинной зависимости с ровно одним '+'.
2) $\Leftrightarrow$ не существует вектора значений, где больше d штук '**0**', а остальные - '+'.
3) Грань - вектор значений без '**-**'.
4) $\Leftrightarrow$ существует вектор значений, где один '+', а остальные '**0**', кроме того, **X** - вершины выпуклого многогранника.
5) $\Leftrightarrow$ существует вектор значений (+-0...0), кроме того, **X** - вершины выпуклого многогранника и сущесвует аффинная зависимость (- - +...+).

Примеры нетривиальных конфигураций точек.

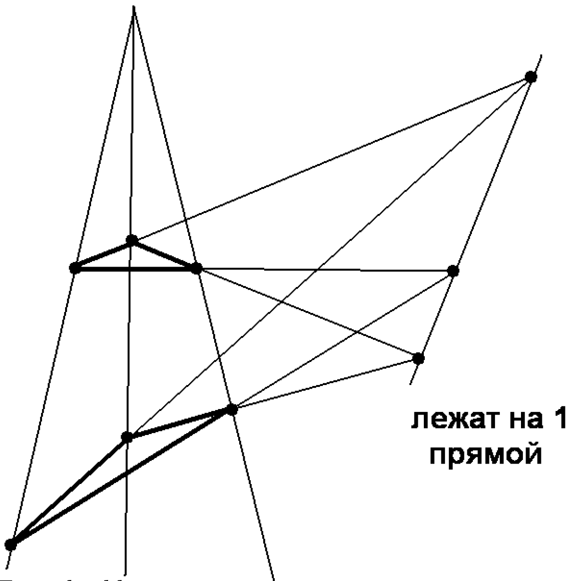
1. **Конфигурация Паппа.**

Рисунок 5.19.



2. **Конфигурация Дезарга.**

Рисунок 5.20.



E-mail address: panina@iias.spb.su