ЗАДАЧИ С ПОДСКАЗКАМИ К ЛЕКЦИЯМ 6-7

Гаянэ Панина

Внимание! Много задач в конспекте лекции 6.

Задача 2.1. *Пользуясь конфигурацией Паскаля, постройте пример 5-мерного многогранника, четырехмерную грань которого нельзя предписать.*

Задача 2.2. *Хулиган Вася утверждает, что конструкция диаграмм Гейла липовая. Он рассуждает так: Пусть $n = 8, d = 3$ (т.е. $n - d - 2 = d$). Тогда диаграммы Гейла устанавливают биекцию между комбинаторными типами d-конфигураций из n точек и комбинаторными типами **раскрашенных** (черно-белых) d-конфигураций из n точек. Хулиган Вася считает, что тех и других типов - конечное число, причем вторых - больше. Противоречие. Прав ли он?*

(Хулиган Вася помнит, что не всякая раскраска дает диаграмму Гейла аффинной конфигурации, но утверждает, что остается большая свобода раскрашивания)

Задача 2.3. *Докажите теорему о расширении Лоренса на языке диаграмм Гейла с помощью матриц.*

Подсказки

К задаче 1.

Раскрасьте конфигурацию Паскаля так, чтобы все коллинеарности точек были бы закодированы неотрицательными векторами (говоря по простому, позаботьтесь о том, чтобы из трех точек , лежащих на прямой, крайние были одного цвета, а та, что между ними - другого).

К задаче 3.

Пусть X -векторная конфигурация. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$

Ее расширение Лоренса описывается матрицей

$L(X) = \begin{pmatrix} X & X \\ E & 2E \end{pmatrix}$ (E - единичная матрица)

Матрица векторной диаграммы Гейла (см. лекция 6)

$$G(X) = \begin{pmatrix} & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}^T & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Теперь дублируем векторы, но разумно: добавляем к конфигурации векторы, противоположные исходным и в два раза короче исходных. Получаем матрицу

$$Double(G(X)) = \begin{pmatrix} & -1 & 0 & & 1/2 & 0 & \\ \mathbf{M}^T & 0 & -1 & -\mathbf{M}^T/2 & 0 & 1/2 & \end{pmatrix}$$

Осталось заметить, что матрица $Double(G(X))$ полного ранга и что $L(X)(Double(G(X)))^T = 0$.

E-mail address: `panina@iias.spb.su`