Программа семинара: Гомологический подход к квантовой гравитации

Преамбула

Как хорошо известно, проблема квантования гравитации стоит уже 80 лет и является самой трудной проблемой теоретической физики. Помимо философских проблем с вероятностным описанием, интерпретацией квантового состояния и т.д. гравитация не определена как квантовая теория поля. В частности, считается установленным, что ее пертурбативное квантование на фоне плоского пространства дает неперенормируемую теорию. Это проявляется в том, что константа связи - масса Планка - является размерной величиной.

Такие же проблемы возникали в теории слабых взаимодействий, в которой также была размерная константа связи - константа Ферми. В теории слабых взаимодействий выход из положения состоял в том, что наблюдаемая при низких энергиях теория была эффективной. Поэтому требовалось найти фундаментальные степени свободы - и они были найдены - ими оказались векторные бозоны.

По аналогии можно предположить, что наблюдаемая на опыте теория Эйнштейновской гравитации является эффективной - и следует найти фундаментальные степени свободы.

Поскольку прямой экпериментальный поиск этих степеней свободы в настоящее время представляется невозможным, проблема допускает только теоретическое исследование. Интересно изучить по возможности более широкий класс теорий, в которых гравитация появляется как эффективная теория.

В настоящее время активно развиваются два подхода к квантовой гравитации, которые будем условно называть струнный и топологический.

Струнный подход

Удачи и неудачи теории бозонных струн и суперструн

Струнный подход к квантованию гравитации, (и теории поля вообще) появился в середине 70-х годов. Согласно струнному подходу фундаментальными степенями свободы являются струнные поля, квантами которых являются протяженные объекты (пространственной размерности 1). Непертурбативная формулировка теории неясна, а пертурбативные амплитуды вычисляются с помощью сумм по римановым поверхностям - что заменяет сумму по графам Фейнмана в обычной теории поля. Такая формулировка гарантирует отсутствие ультрафиолетовых расходимостей, и при этом некоторые версии теории дают теорию гравитации, взаимодействующую с материей, как эффективную низкоэнергетическую теорию. Не только поля, но даже симметрии теории гравитации становятся эффективными и являются следствием репараметризационной симметрии струны.

Система идей о струнном подходе к теории поля оказалась интереснейшей математической конструкцией, детали которой интенсивно изучаются математиками.

Основной поток работ по квантовой гравитации за последние 20 лет был посвящен развитию именно струнной программы.

Тем не менее, струнная программа столкнулась с рядом проблем, которые она не оказалась способной разрешить за последние 20 лет.

Главная проблема - отсутствие непертурбативного описания - так называемой струнной теории поля.

Вторая проблема - неизбежность появления тахиона в бозонной струне и необходимость работать с суперструной - теорией довольно громоздкой и недопонятой. До сих пор нет примера теории струны на несуперсимметричном фоне, не содержащей тахиона.

Третья проблема - проблема дилатонных расходимостей, известные решения этой проблемы лишают теорию всякого изящества - они основаны либо на произвольном разбиении пространства модулей комплексных структур на части, либо на аналитическом продолжении амплитуд, что имеет смысл только на плоском фоне (и потому выглядит неестествено в теории, претендующей на описание гравитации).

От струны к М-теории

Произошедший 10 лет назад прорыв в теории суперструны очевидно указал на существование более общей теории(М-теории), для которой теория суперструн является всего лишь ассимптотикой на специальном фоне. Однако пространство допустимых фонов М-теории содержит и фоны с несколькими равноправными струнами, и 11-мерный фон, в котором струн нет вообще - но есть 11 мерная низкоэнергетическая супергравитация и содержится мембрана (двумерно-протяженный объект, заряженный по 3-тензорному полю супергравитации). Существование М-теории, однако, не проливает ни малейшего света на ее фундаментальное описание - очевидно только то, что оно не струнное.

Таким образом, итогом развития струнной программы явилось возвращение к исходному пункту - построение фундаментальной теории, имеющей в качестве эффективной гравитацию, но теперь требуется получить не просто гравитацию, а 11-мерную супергравитацию с мембраной.

Главная трудность в построении М-теории в том, что она слишком сложна, и потому с трудом поддается исследованию. Подход, развиваемый в последние несколько лет, предполагает поиск более простых версий М-теории, которые были бы непертербативными теориями для теорий струн, более простых, чем суперструна.

К счастью, такие (более простые) теории струн были найдены в процессе работы над струнной программой, они называются топологическими струнами.

Чтобы объяснить, что это такое, следует сказать, что такое теория струн вообще. Один из взглядов на теорию струн вообще можно изложить следующим образом.

Теория струны вообще и бозонной в частности

Теория открытых струн вообще - это (гомотопическая)категория, объекты которой называются Д-бранами, морфизмы - состояниями в теории открытых струн. На морфизмах действует дифференциал, называемый Q_{BRST}. Высшие операции, индуцированные на когомологиях дифференциала - это древесные амплитуды, а высшие квантовые операции (объект, пропущенный в классической гомологической алгебре) - это петлевые амплитуды. Теория замкнутых струн - это теория деформаций гомотопической категории открытых струн.

В рамках этого взгляда объекты обычной теории струны (ее иногда называют бозонной) - это подмногообразия пространства, а состояния струны-морфизмы - строятся следующим образом.

Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство функционалов на нелинейном! пространстве параметризованных

отображений отрезков, начинающиеся на одной Д-бране и кончающиеся на другой.

На нелинейном пространстве действует группа репараметризаций отображений, а векторное пространство функционалов на этом пространстве является естественным модулем над ее алгеброй. Комплекс Шевалле алгебры диффеоморфизмов отрезков со значениями в этом модуле - это и есть пространство морфизмов . Гомотопическое умножение в этом комплексе индуцировано умножением отрезков, которое состоит в присоединении конца первого отрезка к началу второго.

Так называемая суперструна является более сложной версией бозонной струны.

Топологические струны и топологическая М-теория

В последние 15 лет были построены теории струн, отличающиеся от обычной бозонной. По традиции они называются теориями струн типа м и типа Б, опишем (в первом приближении), что они из себя представляют.

Теория открытых струн типа Б является дифференциальной категорией комплексов голоморфных расслоений на комплексных многообразиях.

Теория открытых струн типа м строится следующим образом. Рассматривается комплексное Кэлерово многообразие. Пространство объектов - это пространство лагранжевых подмногообразий в этом пространстве. Пространство морфизмов - множество дифференциальных форм на пересечении лагранжевых подмногообразий.

Первым приближением к струнной теории поля для открытых струн типа м является теория Черна-Саймонса. Она описывает подкатегорию, состоящую из N копий одного и того же лагранжевого подмногообразия (для простоты мы будем считать, что его размерность равна 3). Тогда морфизмы - это дифференциальные формы, принимающие значения в $N \times N$ матрицах, в частности, 1-формы могут быть отждествлены с калибровочными полями, 0-формы - с духами, а действие имеет вид:

$$S = \int kTr(A \wedge A + 2/3 A \wedge A \wedge A) + g.f. \tag{1}$$

где $g.f.$ обозначает члены, фиксирующие калибровку.

Пертурбативная теория возникает при $k \to \infty$, но в этой теории k квантуется, т.е. принимает только целые положительные значения; ответы при таких k - непертурбативные ответы в теории.

В последнее время предпринимаются попытки найти непертурбативную формулировку не только для открытых струн, но и для замкнутых, в теориях как типа м так и типа Б. Это и была бы топологическая М-теория - решаемый прототип М-теории для супергравитации.

Топологический подход

Топологической теорией обычно называется (квантовая) теория, инвариантная относительно диффеоморфизмов (гладких взаимно-однозначных отображений) пространства. Гравитация является такой теорией.

Идея топологического подхода заключается в том, чтобы изучить максимально широкий класс таких теорий, и рассмотреть гравитацию как одну из многих теорий этого класса. Оказывается, это возможно сделать в так называемом формализме Палатини.

Формализм Палатини

Снабдим d-мерное многообразие векторным расслоением со структурной группой $SO(d)$, изоморфным касательному. Рассмотрим пару, состоящую из связности ∇ в векторном расслоении (если бы расслоение было тривиально, то это был бы ковектор A_μ^{ab}, принимающий значения в антисимметричных матрицах размера d) и изоморфизма расслоений e (один форма на пространстве, принимающая значения в сечениях векторного расслоения; для тривиального расслоения e_μ^a - это набор из d ковекторов, занумерованных индексом a). Действие Палатини имеет вид:

$$S_P = \int \epsilon_{a_1 \dots a_d} e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_{d-2}} (\nabla^2)^{a_{d-1}a_d} = \int \epsilon_{a_1 \dots a_d} e^{a_1}_{\mu_1} \dots e^{a_{d-2}}_{\mu_{d-2}} F^{a_{d-1}a_d}_{\mu_{d-1}\mu_d} dx^1 \dots dx^d \tag{2}$$

где

$$F^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ab}_\nu - \partial_\nu A^{ab}_\mu - A^{ac}_\mu A^{cb}_\nu - A^{ac}_\nu A^{cb}_\mu$$

- напряженность связности (вторая форма записи приведена для читателя, не знакомого с формализмом дифференциальных форм).

Расслоение со структурной группой $SO(d)$ снабжено канонической метрикой в слоях(определенной с точностью до умножения на константу), обратный образ этой метрики на слои касательного расслоения задает метрику на касательном расслоении. То есть, метрика на пространстве имеет вид:

$$g_{\mu\nu} = \sum_a e^a_\mu e^a_\nu \tag{3}$$

Оказывается, что если рассмотреть экстремум на пространстве связностей при фиксированном изоморфизме e, то критическое значение действия Палатини как функционал от e будет равно значению действия Гильберта-Эйнштейна, вычисленному на метрике, индуцированной изоморфизмом e:

$$S_p(A(e), e) = S_{HE}(g(e)) \tag{4}$$

Это представление для метрики физики легко проассоциируют с кварковой структурой мезонов. Поле e играет роль кваркового поля, индексы векторного расслоения a- роль цветных индексов, индексы μ -роль ароматов кварков, метрика - это мезонное поле, бесцветное, но лежащее в нетривиальном представлении группы симметрий ароматов. Действие Палатини - это действие записанное через кварки и калибровочные поля, а действие Гильберта-Эйнштейна - эффективное действие для мезонов, полученное после учета цветного взаимодействия.

Расширение теории Палатини за пределы теории Эйнштейна

Отметим, что теорию Палатини можно обобщить, разрешив поля e, не являющиеся изоморфизмами - тогда теория Палатини будет неэквивалентна теории Гильберта-Эйнштейна на квантовом уровне - хотя невырожденные классические решения у них будут совпадать. Зато пространство полей в такой обобщенной теории будет обладать линейной структурой.

В частности, в обобщенной теории будет интересная фаза с нулевой! метрикой и восстановленной группой симметрий состоящей из всех диффеоморфизмов. Отсюда возникает интересная идея о нашем пространстве как о Хиггсовой фазе универсальной гравитации. Это должно напоминать физикам проблему с неперенормируемостью теории, содержащей массивные векторные бозоны. Чтобы увидеть перенормируемость электрослабой теории, нужно учесть, что масса векторных бозонов возникает из эффекта Хиггса, показать перенормируемость теории до возникновения вакуумного среднего у поля Хиггса, и затем показать, что в вакууме с нетривиальным вакуумным средним Хиггсовского поля перенормируемость сохраняется. Поэтому перенормируемость следует искать именно в секторе с ненарушенной симметрией, то есть при нулевой метрике!

Имеющийся опыт показыват, что топологические теории обычно бывают конечными - и это дает надежду на конечность гравитации в топологической формулировке.

От топологических теорий к теориям на дифференциально градуированной алгебре

Формализм Палатини отличается тем, что действие может быть записано через внешнее произведение дифференциальных форм и внешний дифференциал (например, $F + A \wedge A$). Такая формулировка позволяет обобщить пространство, на котором записывается действие гравитации, до дифференциальной градуированной алгебры! При этом обычному пространству будет отвечать дифференциальная градуированная алгебра дифференциальных форм. Следующий уровень обобщения - переход от дифференциальной градуированной алгебры к гомотопической алгебре. При этом изоморфизм алгебр (аналог диффеморфизма) заменяется на квазиизоморфизм (изоморфизм гомотопической алгебры). Это дает возможность заменить бесконечномерную алгебру дифференциальных форм на конечномерную (гоиотопическую) алгебру коциклов на триангуляции пространства. Предполагается, что это и будет ключом к квантовой конечности гравитации.

Итак, для реализации топологической программы следует:

1.Изучить теоретико-полевыми методами топологические теории, описываемые на языке дифференциально-градуированной алгебры форм. Следует заметить, что гравитация в четырехмерном пространстве-времени является далеко не самой простой теорией этого класса.

2.Изучить дискретные версии этих теорий, связанные с гомотопическими алгебрами коциклов на триангуляции пространств и сравнить ответы в тех случаях, когда теории допускают исследование непрерывными (теоретико-полевыми) методами.

Противоречат ли друг другу струнный и топологический подходы?

На раннем этапе развития струнный и топологический подходы к квантованию гравитации выглядели абсолютно несовместимыми.

Струнная программа настаивала на том, что фундаментальными степенями свободы являются протяженные объекты в нашем пространстве - а топологическая - что ими являются тетрады (поля e).

В теории обычных струн сразу была обнаружена критическая размерность-26 для бозонных и 10 для суперструн - поэтому струнное описание нашего мира требовало компактификации и, как следствие, присутствие большого количества дополнительной материи. Это, в свою очередь, могло считаться преимуществом, так как объединяло материю и гравитацию. В топологическом подходе можно было изучать гравитацию в любом числе измерений и с любой материей.

В обычном струнном подходе из-за проблемы с тахионом приходилось изучать все же суперструнные модели, что требовало присутствия суперсимметрии пространства-времени. Топологический подход ничего такого не требует.

По-разному эти два подхода воспринимали неклассическое пространство. В топологическом подходе - это некий аналог симплициального комплекса, а в струнном - конформная теория поля в режиме сильной связи.

Однако, подходы развивались, и каждый из подходов расширял круг объектов, подлежащих изучению. Теории стали весьма похожими, когда в топологическом подходе стали обращать внимание на самую простую теорию - трехмерную гравитацию. Ее действие в формализме Палатини - это просто теория Черна-Саймонса, которая появляется в струнном подходе как теория поля для открытых струн. При интерпретации теории струн как теории дифференциально градуированных категорий сразу находится место для дискретизации пространства-времени - это просто замена комплекса форм на симплициальный комплекс.

Таким образом, при правильном расширении круга теорий и переходе на язык гомологической алгебры снимается противоречие между струнным и топологическим подходами к гравитации, и оптимист мог бы надеятся, что это просто разные представления одной универсальной алгебраической структуры, которая и должна получить название квантовой гравитации.

Почему семиннар посвящен топологическому подходу?

Целью семинара является обучение студентов методам и результатам топологической программы, с непрерывным переходом к решению простейших (новых!) задач в рамках этой программы. Ожидается, что решение этих задач даст студентам необходимый опыт как в квантовой теории поля, так и в гомологической алгебре, что в любом случае является полезным. Они сформируют свой свежий взгляд (основанный на личном опыте) на проблемы квантовой гравитации и дискретизации в квантовой теории поля, что должно положительно сказаться на формировании их научного мировоззрения. Овладение методами гомологической алгебры (и того ее обобщения, которое следовало бы назвать квантовой гомологической алгеброй) облегчит им понимание теории топологических струн, являющееся сейчас главным напрвлением развития струнной программы.

В силу особенностей научно-политического развития теории квантовой гравитации основные силы были брошены на реализацию струнной программы, поэтому число простых нерешенных задач в топологической программе гораздо больше. Более того, число физиков, владеющих современным математическим аппаратом (в частности, методами гомологической алгебры) и занимающихся топологическим подходом к гравитации ничтожно мало. Особо хочется подчеркнуть, что занятие струнным подходом сегодня подразумевает заучивание в короткий срок гигантского объема информации, принятие многих спорных утверждений на веру и состязание в эрудиции. Занятия топологическим подходом подразумевают немедленное погружение в неизвестное и способствуют творческому росту студентов.

Таким образом, занятие топологическим подходом к квантовой гравитации представляет собой идеальную область деятельности для молодых мат-физиков.

План работы учебно-исследовательского семинара

Классическая теория поля в различных измерениях

1. Теория тензорного поля в различных измерениях, абелева топологическая теория и обобщение электро-магнитной двойственности.
2. Теория тензорного поля с Черн-Саймоновским членом
3. Теория волн тензорного поля, число поляризаций
4. Действие Гильберта-Эйнштейна, линейная теория гравитационных волн.
5. Компактификация в меньшее число измерений, описание получающихся теорий.
6. Эквивалентность теории Палатини теории Гильберта-Эйнштейна.
7.Теория Палатини как теория Черна-Саймонса в трехмерии.
8. Описание гравитационных волн и компактификации в меньшее число измерений на языке Палатини.
9. Взаимодействие тензорных полей с гравитацией в формализме Палатини.
10.Взаимодействие скалярного поля с абелевым калибровочным, эффект Хиггса в разных размерностях.

Квантовые свойства квадратичных и топологических теорий

1. Корреляторы в квадратичных теориях в разных измерениях
2. Корреляторы в квадратичных топологических теориях, украинская аномалия.
3.Члены типа Черна-Саймонса в разных размерностях и их геометрический смысл
4.БРСТ квантование калибровочных теорий в разных размерностях
5.Теория Черна-Саймонса как теория дифференциально-градуированной алгебры
6. Квантовые топологические теории в размерностях 1 и 2
7. Гипотеза о конечности топологических теорий в разных размерностях
а)рассуждение по Волину
б)калибровка Рослого-Морозова
8. БВ язык и проблема конечности корреляторов
9. Пертурбативное исследование квантовой трехмерной гравитации
а) взаимодействующей со скалярным полем
б)взаимодействующей с электромагнитным полем
в)взаимодействующее с нелинейной сигма-моделью
10. Сравнение неперенормируемости (в размерности больше чем 2) нелинейной сигма модели с перенормируемостью а) линейной калиброванной модели
б) модели с потенциалом
11.Сравнение однопетлевой поправки к притяжению двух масс в стандартной теории и в формализме Палатини
12. Пертурбативное исследование расходимостей в 4-мерной гравитации в формализме Палатини
13. Компактификация Калузы-Клейна из 4 в 3 в формализме Палатини, сравнение расходимостей

Дискретизация топологической теории и гомологическая алгебра

1.Дифференциально-градуированная алгебра дифференциальных форм и гомотопические алгебры
2. Симплициальный комплекс, дифференциал на коцепях, несуществование дифференциально-градуированной алгебры на коцепях.
3. Построение первых высших структур в гомотопической алгебре на коцепях в размерности 1 и 2 методом проб и ошибок.
4. БВ интеграл и универсальная формула построения классических и квантовых высших операций.
5. Применение гомотопии Уайтхеда для построения явных формул (в раз-

ной размерности)
6. Вычисление высших квантовых операций по гомотопии Уайтхеда, проверка конечности в разных размерностях
7. Описание топологической теории как теории на триангуляции с высшими умножениями, сравнение ответов с полученными другими методами
8. Попытка воспроизвести ответ в теории Черна-Саймонса на сфере методами триангуляции
9. Методы триангуляции в трехмерной гравитации взаимодействующей с трехмерной материей
10. Попытка применить методы триангуляции в четырехмерной гравитации
.