СУММА МИНКОВСКОГО. ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ. ВИРТУАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГОГРАННИКИ

запись Марины Князевой

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$.
(Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка непустого конечного множества точек.)

Сумма Минковского

Определение 1.1. Пусть K, L - многогранники. Их *суммой Минковского* называется $K \otimes L = \{\mathbf{x}+\mathbf{y} : \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in L\}$.
(мы отождествляем точки пространства с их радиус-векторами.)
Сумма Минковского многогранников - тоже выпуклый многогранник (что легче всего объяснить перейдя к опорным функциям - см. ниже).

Вот простые свойства.

- Операция $\otimes$ превращает $\mathcal{P}$ в полугруппу с единицей. Роль единичного элемента играет точка O (начало координат).
- Обратимыми элементами в полугруппе являются лишь одноточечные многогранники.
- Замена начала координат меняет сумму Минковского на сдвиг.
- При паралельных переносах слагаемых сумма тоже параллельно сдвигается.

Элементарные примеры.

- Куб - сумма Минковского трех отрезков.
- Треугольная призма - сумма Минковского треугольника и отрезка
- Полезное упражнение - нарисуйте два треугольника (с непараллельными сторонами) и их сумму Минковского.

Опорная функция

Определение 1.2. Пусть K - выпуклый многогранник. Его *опорная функция* $h_K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
по определению равна
$h_K(\mathbf{x}) = max_{\mathbf{y} \in K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
(скобки обозначают скалярное произведение)

- Опорная функция многогранника, состоящего из одной точки - линейная функция. И наоборот, всякая линейная функция $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ является опорной функцией некоторой точки (очевидным образом восстанавливаемой).

- Для выпуклого многогранника K его опорная функция
  -непрерывна
  -положительно однородна : для $\lambda \geq 0$ справедливо $h_K(\lambda \mathbf{x}) = \lambda h_K(\mathbf{x})$
  - выпукла вниз
  - $h_{K \otimes L} = h_K + h_L$
  - кусочно-линейна.

  Поясним последнее. Легко видеть, что для фиксированного $\mathbf{x}$ максимум скалярного произведения достигается на некоторой вершине многогранника K. Таким образом, все пространство $\mathbb{R}^3$ разбито на области (соответствующие вершинам многогранника), такие, что для каждой области максимум скалярного произведения достигается на некоторой вершине (скажем, $\mathbf{a}$). Следовательно, в этой области h_K равна опорной функции точки $\mathbf{a}$, т. е. некоторой линейной функции.

  Области разбиения - многогранные конусы с вершиной в начале координат (это следует из положительной однородности h_K).

  Это разбиение называется *веером* многогранника K.
- И наоборот, всякая функция h, обладающая вышеперечисленными свойствами - опорная функция некоторого выпуклого многогранника. Этот многогранник легко восстановить, т. к. линейные функции, из которых "склеена"h, дают вершины искомого многогранника.

Следствие.

Полугруппа $\mathcal{P}$ изоморфна полугруппе функций $\mathcal{F}$, заданных на $\mathbb{R}^3$, которые

-выпуклы

-непрерывны

- кусочно-линейны относительно некоторого разбиения пространства на конуса с вершиной в O (= относительно некоторого веера).

Полугрупповая операция - поточечное сложение.

Сферический веер выпуклого многогранника

Удобно рисовать не сам веер, а его пересечение с единичной сферой с центром в начале координат. Получается некоторое разбиение сферы на сферические многоугольники. Комбинаторно эта сферическая картинка двойственна исходному многограннику.

Построить веер выпуклого многогранника просто:

- отметить на единичной сфере концы внешних нормалей граней

-соединить кратчайшей геодезической те пары полученных точек, для которых соответствуюшие грани делят ребро.

Виртуальные многогранники

В полугруппе $\mathcal{P}$ выполняется закон сокращения : $K \otimes A = L \otimes A \Rightarrow K = L$. (это так, поскольку закон сокращения выполняется в изоморфной полугруппе функций $\mathcal{F}$).

Следовательно, $\mathcal{P}$ вкладывается в свою группу Гротендика $\mathcal{P}^*$ - группу формальных выражений вида $K \otimes L^{-1}$ где K, L - выпуклые многогранники.

Она называется *группой виртуальных многогранников.*

Заметим, что группа $\mathcal{P}^*$ изоморфна группе $\mathcal{F}^*$, т. е. группе непрерывных кусочно-линейных относительно некоторого веера функций, заданых на $\mathbb{R}^3$.

Таким образом, у нас уже имеется хорошо определенное понятие опорной функции виртуального многогранника. (= мы умеем описывать виртуальные многогранники на двойственном языке опорных функций).

Следующая теорема придает геометрический смысл этим формальным выражениям.

Теорема 1.3. Виртуальный многогранник, связанный с многогранной поверхностью.

Пусть $\mathcal{C}$ -замкнутая многогранная поверхность в $\mathbb{R}^3$ (возможно, невыпуклая, с самопересечениями и самоналожениями).

Предположим, что существует набор нормалей ξ_i граней T_i поверхности и сферический веер Σ с вершинами в $\{\xi_i\}$ такой, что выполнены два условия:

1. (Главное условие.) Веер Σ комбинаторно двойственен комплексу $\mathcal{C}$. (В частности это означает, что точки ξ_i и ξ_j соединены ребром Σ тогда и только тогда, когда T_i и T_j имеют общую $n-2$ -мерную грань в $\mathcal{C}$.)

2. (Дополнительное условие для случая, когда на поверхности имеются параллельные соседние грани.) Если две соседние грани T_i и T_j параллельны, (и следовательно, их нормали противоположны), то точки ξ_i и ξ_j соединены ребром (ребрами) веера Σ_K, которое ортогонально общей грани (соответственно, общим граням, если таковых несколько) граней T_i и T_j.

В таком случае паре $(\mathcal{C}, \Sigma)$ можно канонически поставить в соответствие виртуальный многогранник.

Доказательство.

Укажем опорную функцию h искомого виртуального многогранника. Пусть клетке веера α соответствует (по двойственности) вершина $\mathbf{a}$. положим h равной опорной функции $\mathbf{a}$ (она глобально линейна) на клетке α. Поступив так со всеми клетками веера, получим кусочно линейную функцию. Ее непрерывность следует из соображений двойственности.

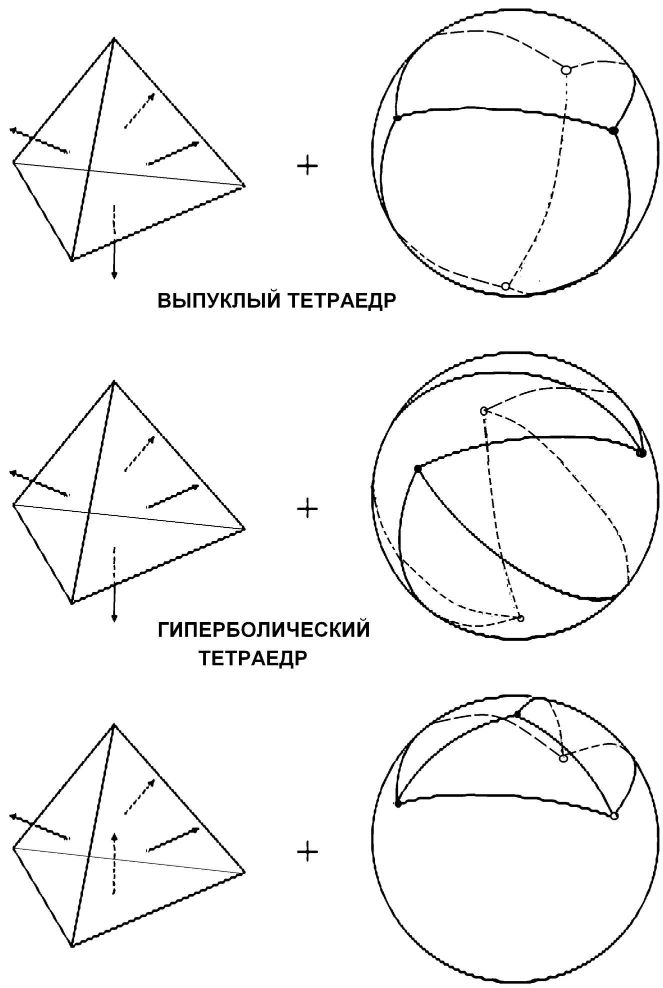
Эта конструкция полностью соответствует классическому склеиванию опорной функции выпуклого многогранника из опорных функций его вершин. $\square$

Заметим, что в условии теоремы не требуется, чтобы совокупность выбранных нормалей задавала глобальную ориентацию поверхности - вектора можно выбирать независимо друг от друга.

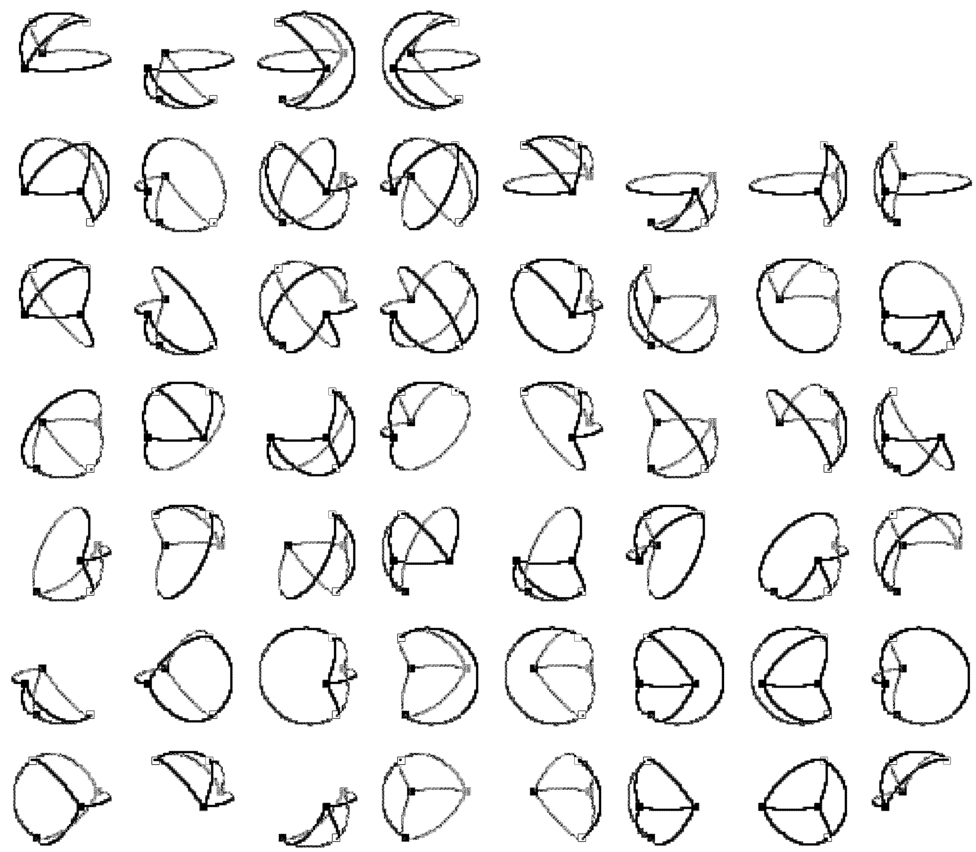
Иногда существует несколько вееров, двойственных одной и той же поверхности. Это значит, что с поверхностью ассоциированны несколько разных виртуальных многогранников.

Например, с трехмерным тетраэдром можно связать 52 виртуальных многогранника. Вот некоторые из них.

Рисунок 1



Вот полный перечень вееров виртуальных тетраедров (построил и нарисовал слушатель летней школы Современная математика-2005 (Дубна) Влад Щербина):



Гипреболические виртуальные многогранники

Пусть K - виртуальный многогранник, h - его опорная функция. Рассмотрим плоскость e в $\mathbb{R}^3$ и сужение функции h на плоскость e.

Обозначим через $\Gamma_e(h)$ график этоко сужения. Это некоторая (двумерная) поверхность в трехмерном пространстве.

Простой факт:

K - выпуклый многогранник тогда и только тогда, когда поверхность $\Gamma_e(h))$ выпукла вниз для любой плоскости e.

Определение 1.4. Пусть F - поверхность (без края), $\mathbf{x} \in F$. Точка $\mathbf{x}$ называется *седловой*, если любая плоскость, содержащая $\mathbf{x}$, локально пересекает F более чем в одной точке.

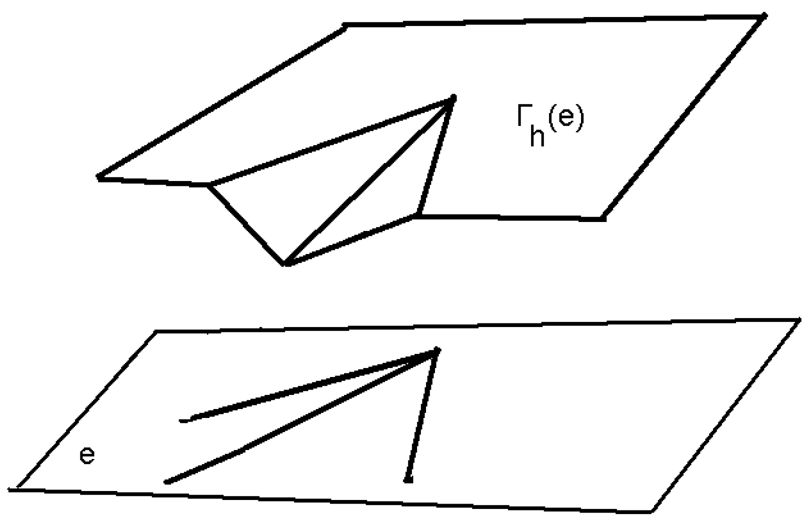
Определение 1.5. Пусть K - выпуклый многогранник. Он называется гиперболическим, если поверхность $\Gamma_e(h)$ - седловая для любой плоскости e.

- Плоскость - седловая поверхность.
- У многогранной поверхности неседловыми точками могут быть только вершины.
- Не бывает замкнутых многогранных седловых поверхностей в R^3.

Первый содержательный пример гиперболического многогранника - гиперболический тетраедр. Он гиперболичен в силу следующей леммы.

Лемма 1.6. *Пусть сферический веер виртуального многогранника K таков, что для каждой его вершины один из прилегающих углов больше π. (См. напримеер веер гиперболического тетраедра.) Тогда K - гиперболический многогранник.*

Доказательство. Воспользуемся определением. Сужение опорной функции h_K - функция, которая кусочно линейна относительно некоторого разбиения плоскости e с тем же свойством. График такой функции очевидно седловой - см. рисунок.



E-mail address: panina@iias.spb.su, gaiane-panina@rambler.ru