ЗАДАЧА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА. СФЕРИЧЕСКИЙ ГРАФИК ВИРТУАЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА. СЕДЛОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ. ОСОБЕННОСТИ ВЕЕРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА.

запись Марины Князевой

Понятие иперболических многогранников возникло при изучении следующей проблемы.

Гипотеза о единственности гладких выпуклых поверхностей (задача А. Д. Александрова).

Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ - гладкое тело. Если существует такая константа C, что в каждой точке ∂K выполнено неравенство $R_1 \leq C \leq R_2$, то тело K - шар. (R_1 и R_2 обозначают главные кривизны ∂K).

Рассмотрим разность Минковского $B^0 = B \otimes D^{-1}$, где D - шар радиуса C. Поскольку опорная функция ведет себя аддитивно по отношению к сложению по Минковскому, главные радиусы кривизны R_1^0 and R_2^0 полученного объекта B^0 удовлетворяют неравенству

$$R_1^0 \leq 0 \leq R_2^0.$$

Следовательно, B^0 - седловая поверхность во всех своих регулярных точках (т.е. таких, где радиусы кривизны не обращаются в ноль).

Обратно, пусть B^0 - разность Минковского двух C^2 гладких тел и седловая поверхность (всюду, кроме сингулярных точек). C^2 - гладкость влечет, что главные радиусы кривизны R_1^0 R_2^0 ограничены в совокупности снизу константой C. Тогда сумма $B = B^0 \otimes D$ - выпуклое тело и контрпример к Гипотезе (D -шар радиуса C).

План построения контрпримера таков:

1. Построить гиперболический многогранник
2. Сгладить его опорную функцию, сохраняя при этом седловое свойство.
3. Прибавить к полученной гладкой функции опорную функцию шара достаточно большого радиуса (надо добиться выпуклости суммы).
4. Enjoy!

Сферический график опорной функции

Удобно рисовать график опорной функции на трехмерной сфере. Зафиксируем для этого включение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^4$. Единичную сферу с центром в O, лежащую в $\mathbb{R}^3$ (соответственно, в $\mathbb{R}^4$) обозначим через S^2 (соответственно, через S^3). Пусть $h : \mathbb{R}^3 \to R$ -положительно однородная функция. Для

$\xi \in S^2$ обозначим через $e(\xi)$ двумерную плоскость, лежащую в $\mathbb{R}^3$, касательную к S^2 в точке ξ. Обозначим через $h|_e$ сужение функции h на плоскость $e = e(\xi)$.

Рассмотрим *аффинный график* сужения $h|_e$, а именно,

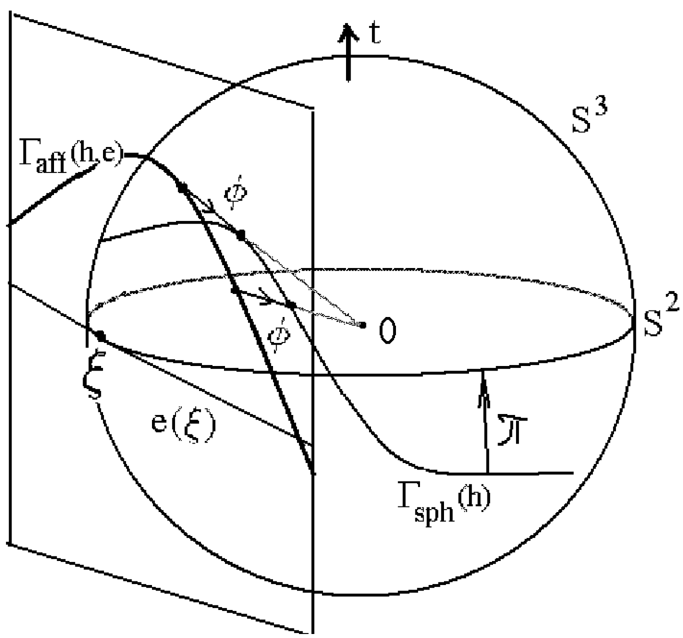
$$\Gamma_{aff}(h, e) := \}(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in e; t = h(x, y, z)\}.$$

и его образ $\Gamma_{sph}(h, e)$ на S^3 при сферической проекции ϕ с центром в O (см. Рис. 3.4.1).

Объединение всех этих графиков $\Gamma_{sph}(h) := \cup_{\xi \in S^2} \Gamma_{sph}(h, e(\xi))$ называется *сферическим графиком* функции h.

Это двумерное замкнутое подмногообразие S^3. Сферическая центральная проекция $\pi : S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\} \to S^2$ биективно отображает $\Gamma_{sph}(h)$ на S^2.

Рисунок 2.1.



Предложение 2.2.

- *h - выпуклая фунеция тогда и только тогда, когда $\Gamma_{sph}(h)$ - выпуклая поверхность.*
- *h - линейная функция (т. е. опорная функция точки) тогда и только тогда, когда $\Gamma_{sph}(h)$ - большая двумерная сфера.*
- *h - опорная функция гиперболического многогранника тогда и только тогда, когда $\Gamma_{sph}(h)$ - седловая поверхность.*

Доказательство.

Для выпуклых (соответственно, гиперболических) функций график $\Gamma_{aff}(h, e(\xi))$ - выпуклая (соответственно, седловая)поверхность для всякого ξ. Остается заметить, что проекция ϕ не меняет тип выпуклости, так как отображает плоскости на большие сферы, лежащие на S^3. $\square$

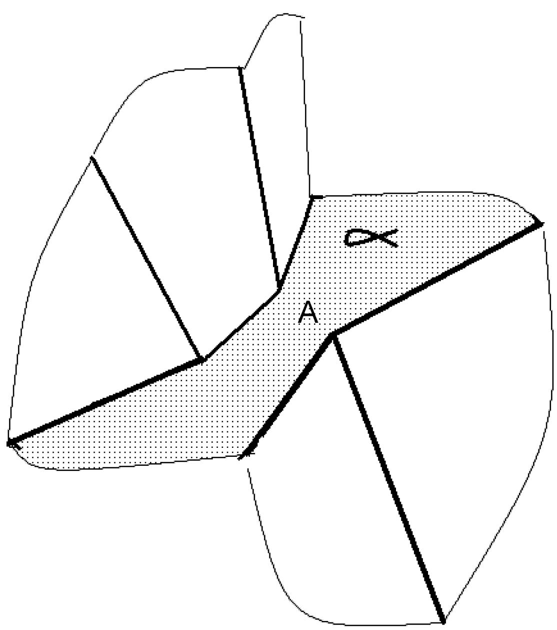
Теорема 2.3. *Пусть K - замкнутая кусочно-линейная поверхность, которая (вместе с некоторым веером, см. лекция 1) задает гиперболический виртуальный многогранник.*

Пусть P - вершина , являющаяся рогом поверхности, т. е. такой ее вершиной, через которую можно провести плоскость, пересекающую ровно в этой точке. Таких рогов у поверхности не менее четырех.

Пусть наконец α - сферическая клетка веера гиперболического многогранника, соответствующая вершине Тогда

- *α ограничена двумя выпуклыми ломаными, выпуклостями друг к другу (см. рис. 2.4).*
- *α содержит большой полукруг*
- *вдоль ребер одной из ломаных опорная функция выпукла вниз, вдоль другой-вверх (см. рис. 2.4).*

Рисунок 2.4.



Доказательство.

Пусть h - опорная функция K. Выберем такую систему координат, в которой $P = O$ и x-координаты всех вершин меньше 0 . Следовательно, $h'_x < 0$ всюду кроме α и $h'_x = 0$ на α

(Действительно, в рамках одной клетки (= области линейности опорной функции) $h'_x = 0$- коэффициент сужения функции h при $x =$ -координата соответствующей вершины).

Рассмотрим плоскость e такую, что ось OX параллельна e и рассмотрим (следуя определению гиперболического многогранника) сужение опорной функции h на плоскость e. График этой функции горизонтален над клеткой α и имеет отрицательный наклон вдоль OX (отсюда следует третье утверждение теоремы). Легко видеть, что если угол клетки α (скажем, при вершине A) ментьше π, то эта вершина - не седловая.

Доказано первое утверждение. Второе из него легко следует. □

Мораль.

- Седловая кусочно-линейная поверхность на S^3, проецирующаяся однолистно на некоторый двумерный экватор, обязана содержать по крайней мере 4 "длинные"грани - содержащие большой полукруг.
- Поэтому построение гиперболического многогранника (точнее сферического графика его опорной функции) иногда разумно начать именно с этих граней.
- Этим граням соответствуют своеобразные клетки веера гиперболического многогранника - у такой клетки **только два выпуклых угла**.

Много красивых рисунков таких вееров можно увидеть в статье "On hyperbolic polytopes and hyperbolic fans"(см. литература к курсу).

Теорема 2.3 имеет следующий аналог для гладких седловых поверхностей.

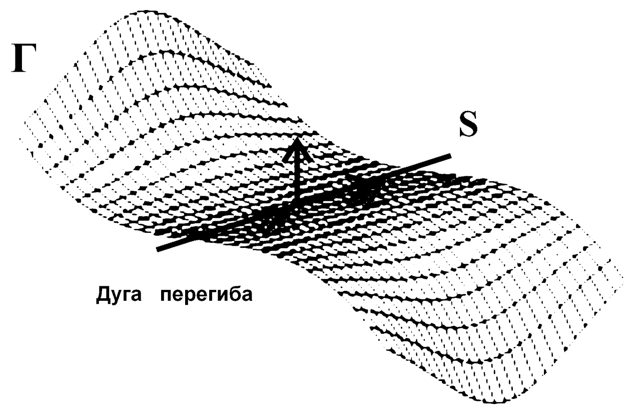
Пусть Γ - двумерная замкнутая поверхность, лежащая на трехмерной сфере.

Определение

Дугой перегиба Γ называеатся большой полукруг $S \subset S^3$ такой, что

- $S \subset \Gamma$
- Для любой большой сферы $e \subset S^3$, трансверсально пересекающей S, точка $e \bigcap S$ является точкой перегиба кривой $e \bigcap \Gamma$

Рисунок 2.4



Теорема 2.5. (без доказательства)

Пусть Γ *- гладкая седловая поверхность, лежащая на* S^3 *и допускающая биективную ортогональную проекцию на некоторую большую сферу* S^2 *. Тогда* Γ *содержит по крайней мере 4 дуги перегиба.* □

E-mail address: panina@iias.spb.su, gaiane-panina@rambler.ru