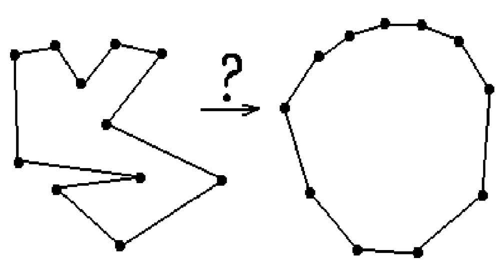
ЗАДАЧА О ПЛОТНИЦКОЙ ЛИНЕЙКЕ. ЖЕСТКОСТЬ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ. ЛАМАНОВЫ ГРАФЫ. ЦИКЛЫ ЖЕСТКОСТИ.

запись Марины Князевой

Плотницкая линейка представляет собой замкнутую плоскую ломаную без самопересечений. Длины отрезков фиксированы, а в вершинах плотницкая линейка может изгибаться, как шарнирный механизм.

Задача о плотницкой линейке: Любую ли плотницкую линейку можно распрямить (сделать выпуклой) в плоскости стола, избежав самопересечений в процессе распрямления?

Рисунок 3.1.

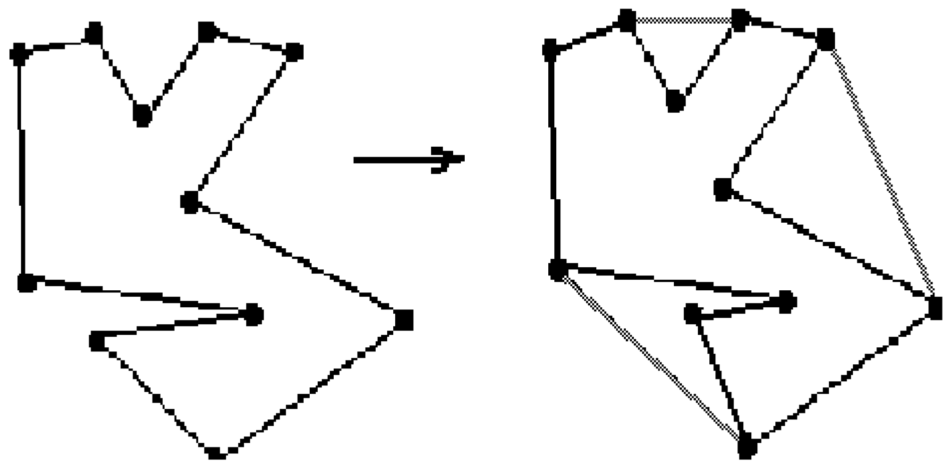


Задача была решена в 2000 году Connelli, Rote, Demain: плотницкую линейку распрямить можно. Явный алгоритм был предложен в том же году I. Streinu.

Алгоритм распроямления плотницкой линейки:

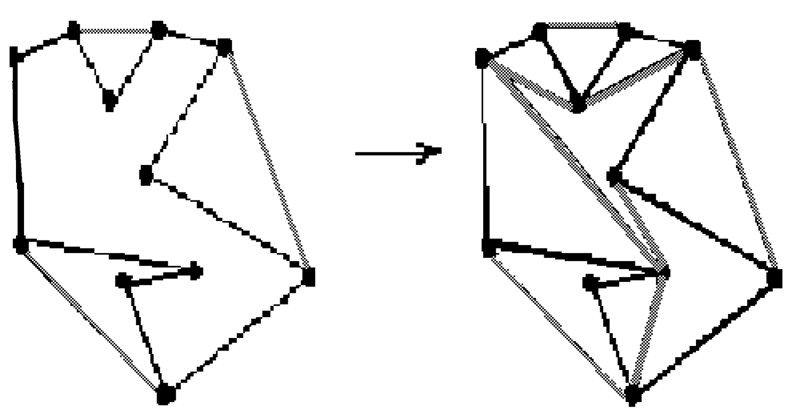
- добавляем новые серые планки на выпуклой оболочке, закрепляя их шарнирами;

  Рисунок 3.2.



- добавляем максимально возможное количество новых серых планок так, чтобы выполнялись условия:
  - граф не имеет самопересечений;
  - у каждой вершины должен быть прилегающий угол $> \pi$ (это свойство называется **свойством "pointed"**).

  Рисунок 3.3.

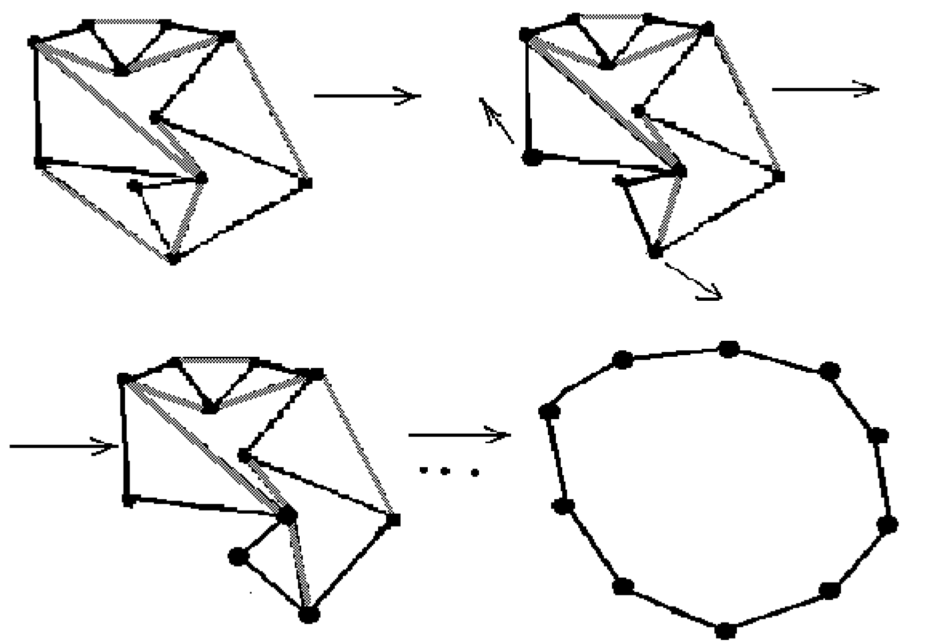


Если убрать одно новое внешнее ребро, то полученный объект будет обладать следующими свойствами:

- *flexible* (он подвижный) с одной степенью свободы (см. теорема 3.7 ниже);
- *expansive motion* (если увеличивать расстояние между вершинами, прежде соединенными удаленным ребром, то расстояние между любыми двумя вершинами объекта не уменьшается!) - пока без доказательства.

Таким образом, убираем одно внешнее серое ребро, раздвигаем вершины (при этом все разъезжается вширь) до тех пор, пока сохраняется свойство "pointed". А когда оно исчезает для какой-нибудь вершины, то простая перестройка позволяет продолжить процесс. Процесс завершится, когда многоугольник станет выпуклым. Так за конечное число шагов плотницкая линейка распрямляется на плоскости.

Рисунок 3.4.



Ламановы графы.

Будем рассматривать планарный граф Γ без петель и кратных ребер; v - количество вершин графа; e - количество ребер.

Определение 3.5. *Геометрической реализацией* графа называем плоский рисунок графа с условиями: все ребра - отрезки прямых, и они не пересекаются. Реализация графа называется *реализацией общего положения*, если вершины графа лежат в общем положении.

Будем рассматривать плоскую реализацию как шарнирный механизм.

Определение 3.6. Г - ламанов, если $e = 2v - 3$ и любые k вершин графа порождают не более $2k-3$ ребер. (Под порождением понимаем следующее: берем подграф, натянутый на выбранные вершины и считаем его ребра)

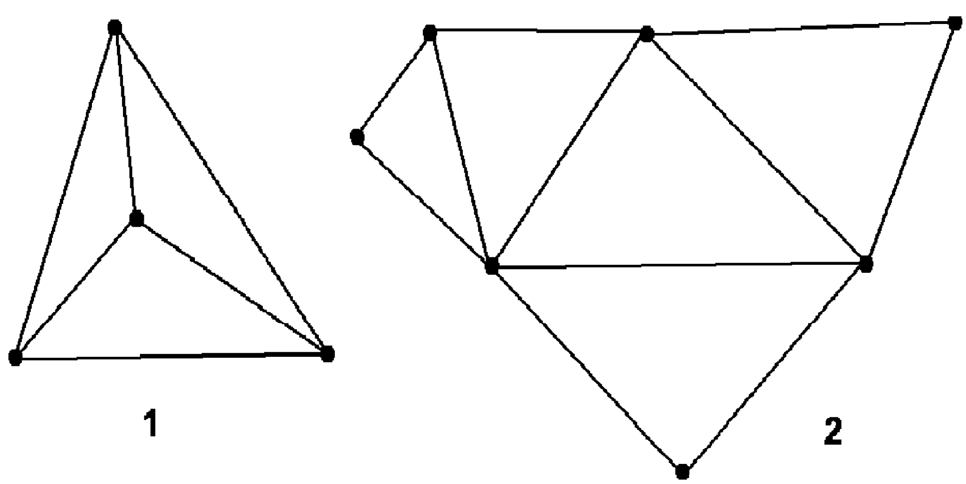
Теорема 3.7. Г - *ламанов* $\Leftrightarrow$

- *его общая реализация - жесткий механизм, и*
- *это минимальный жесткий механизм, т.е.* $\Gamma \setminus \{$*любое ребро*$\}$ - *нежесткий механизм.*$\Box$

(Без доказательства)

Например, первый граф жесткий, но не минимальный жесткий; второй - жесткий и минимально жесткий, т.е. ламанов.

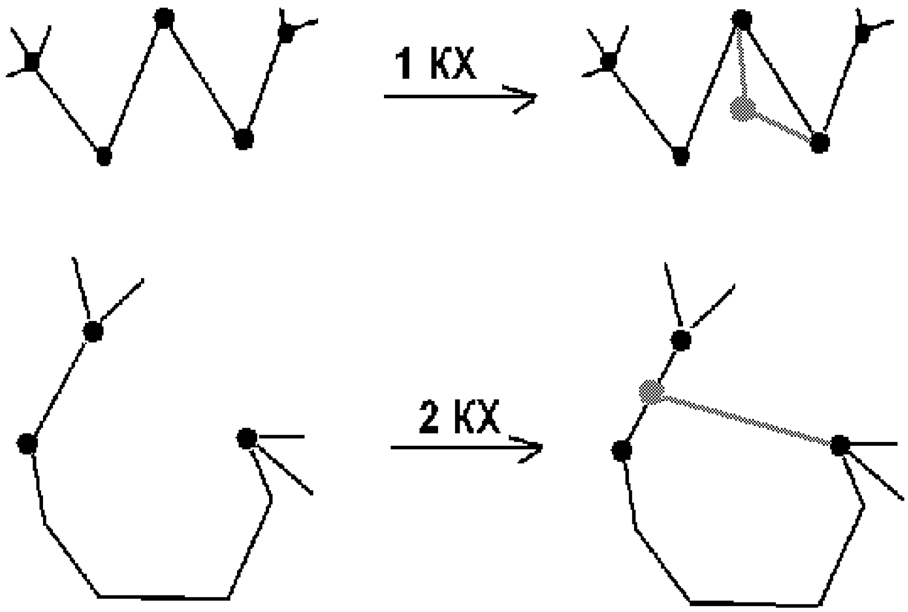
Рисунок 3.8.



Комбинаторные конструкции Хеннеберга.

Это комбинаторные локальные достройки связного графа, не меняющие его жесткость.

Рисунок 3.9.



1 конструкция Хеннеберга: добавляется новая вершина, которая соединяется ребрами с двумя старыми вершинами.

2 конструкция Хеннеберга: добавляется новая вершина на старом ребре (это старое ребро превращается в два новых ребра) и новая вершина соединяется с некоторой старой вершиной.

Теорема 3.10. Γ - *ламанов* ⇔ Γ *получается цепочкой конструкций Хеннеберга из графа с двумя вершинами и одним ребром.* □

(Без доказательства)

Псевдотриангуляции.

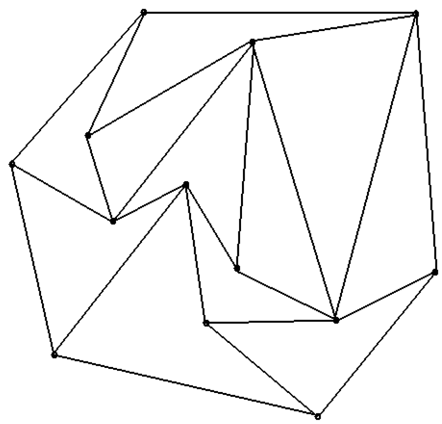
Определение 3.11. *Псевдотреугольником* называется многоугольник, у которого ровно 3 выпуклых вершины.

Например, обычный треугольник является псевдотреугольником.

Определение 3.12. *Псевдотриангуляцией* называется разбиение плоского выпуклого многоугольника на псевдотреугольники.

Особенно важны псевдотриангуляции, обладающие свойством "pointed". Вот пример "pointed"псевдотриангуляции.

Рисунок 3.13.



Теорема 3.14. Γ - *ламанов, планарен* ⇔ Γ *реализуем в виде "pointed" псевдотриангуляции.*

Доказательство:

⇐ Обозначим через f число областей разбиения псевдотриангуляции. Тогда из формулы Эйлера получаем:

$$v - e + f = 2$$

Заметим, что углов всего $2e$, из них углов, больших π, всего v. Число выпуклых углов с одной стороны равно $2e - v$, а с другой стороны равно $3(f-1)$. Тогда получаем:

$$3(f-1) = 2e - v$$

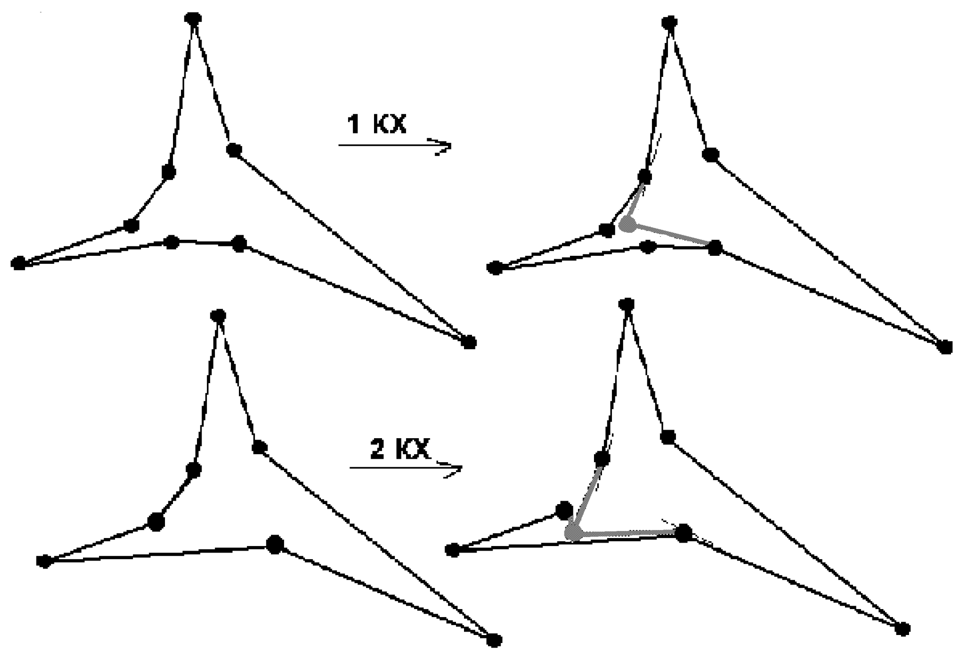
Объединив эти формулы, получим:

$$e = 2v - 3$$

Таким образом, выполнено первое условие ламановости графа. Второе условие следует из того, что свойство "pointed"наследуется подграфами.

⇒ Представим Γ в виде последовательности конструкций Хеннеберга от треугольника $\Gamma = X_1 ... X_n(\Delta)$. Исходный граф (треугольник) можно нарисовать в виде псевдотриангуляции (обычный исходный для конструкций Хеннеберга треугольник есть и псевдотреугольник). Продемонстрируем на примере, что конструкции Хеннеберга могут быть реализованы геометрически с сохранением свойства "pointed"в виде псевдотриангуляций. Поскольку на каждом шагу граф ламанов, то все рисунки - "pointed"псведотриангуляции.

Рисунок 3.15.



Если в граф уже нельзя добавить ребро с сохранением свойства "pointed", то это граф ламанов. □

Определение 3.16. Γ - *Ламан+1-граф*, если $\Gamma \backslash \{$некоторое ребро$\}$ - ламанов.

Теорема 3.17.

- *Множество планарных Ламан+1-графов совпадает с множеством графов, допускающих вложение в плоскость в виде псевдотриангуляции, все вершины которой, кроме одной являются "pointed".*
- *Такое вложение Ламан+1-графа может быть построено индуктивно, стартуя с вложенного графа K_4 (полного графа с четырьмя вершинами). Каждый шаг построения - геометрическая реализация конструкции Хеннеберга.*

Такое вложение порождает стартовую псевдотриангуляцию (в данном случае - обычную триангуляцию) ровно с одной не "pointed"вершиной. Каждый шаг алгоритма - геометрическая конструкция Хеннеберга, меняющая вложение лишь локально.□

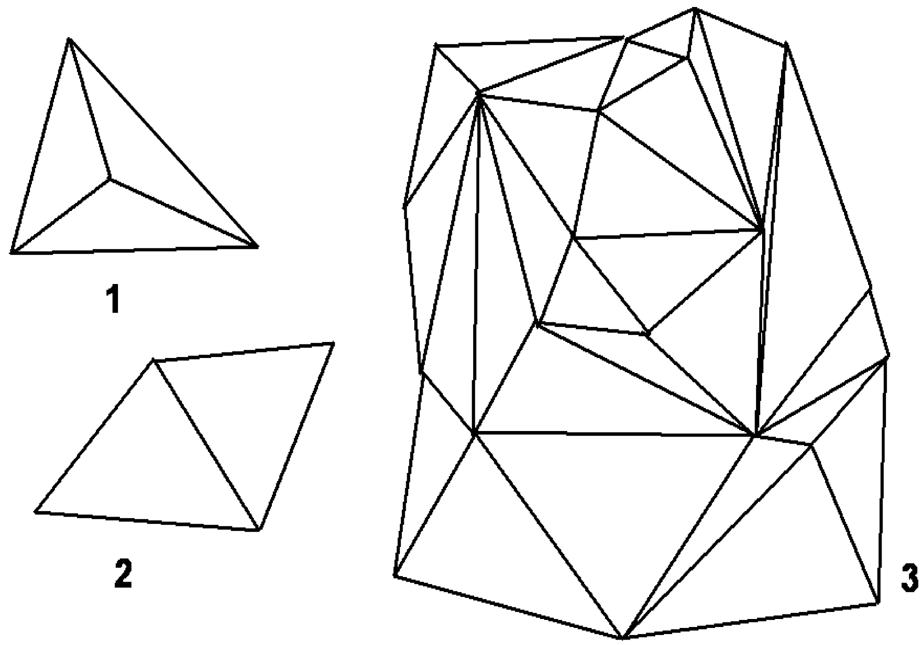
(доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.)

Определение 3.18. Пусть есть реализация Γ. Говорим, что Γ обладает **3D lift -ом**, если существует кусочно-линейная относительно порожденного разбиения функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

С точки зрения теории виртуальных многогранников такие графы особенно интересны.

Например, 1 и 3 обладают 3D lift -ом, а 2 - нет (т.к. есть двухвалентные вершины).

Рисунок 3.19.



Определение 3.20. Γ - *цикл жесткости (rigidity circuit)*, если $\Gamma \setminus \{$любое ребро$\}$ - ламанов.

Теорема 3.21. *Общая реализация* Γ *имеет единственный (с точностью до аффинного преобразования) 3D lift* $\Leftrightarrow$ Γ *- цикл жесткости.*$\square$

(Без доказательства)

Мораль: мы получили простой способ проверки того, существует ли для разбиения (области на плоскости или сферы) кусочно-линейная относительно этого разбиения функция. Проверка сводится к подсчету числа ребер и вершин.

E-mail address: `panina@iias.spb.su, gaiane-panina@rambler.ru`