

# ОБЪЕДИНЕНИЕ ДВУХ ТЕОРИЙ. ПРОСТОЙ СПОСОБ ПОСТРОИТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК. ПРЕИМУЩЕСТВО СФЕРИЧЕСКИХ ВЛОЖЕНИЙ ГРАФОВ. ЕЩЕ РАЗ О СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.

запись Марины Князевой

Вот небольшое дополнение к предыдущей лекции.

**Теорема 4.1.**  $\Gamma$  - ламан+1-граф  $\Leftrightarrow$  для обцего вложения  $\Gamma$  существует единственная кусочно-линейная непрерывная функция  $f$ :

- $f \neq$  линейной функции;
- $f$  - линейна на любой области разбиения.

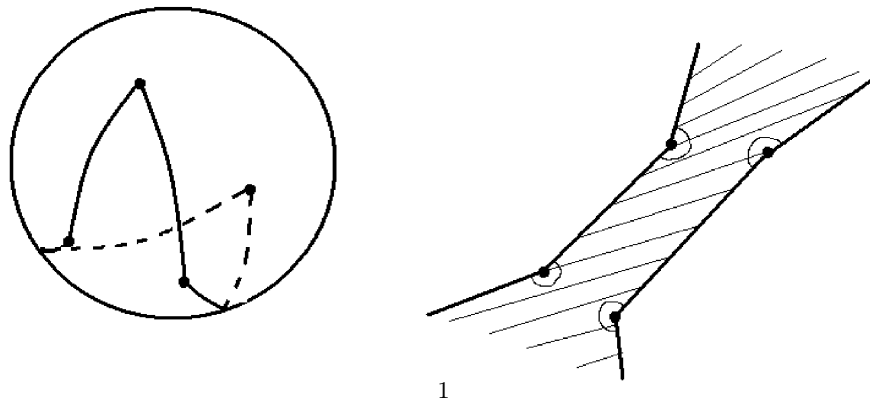
Заметим, что эта функция  $f$  может быть кусочно-линейной относительно не самого разбиения, порожденного  $\Gamma$ , а некоторого его укрупнения.  $\square$

Объединяем результаты прошлых лекций.

Чтобы построить виртуальный многогранник, достаточно построить его опорную функцию - некоторую кусочно-линейную непрерывную функцию (лекция 1). А для нахождения такой функции, достаточно построить на сфере граф, который имеет 3D lift (по определению). Причем, если граф на сфере обладает свойством pointed, то соответствующий виртуальный многогранник будет гиперболическим (лекция 2).

Рогам виртуального многогранника (по комбинаторной двойственности) соответствуют особые клетки сферического веера (лекция 2), вмещающие полукруг - псевдодвуугольники. Это сферические многоугольники, у которых все углы, кроме двух, больше  $\pi$ .

**Рисунок 4.2.**



**Определение 4.3.** "*Nice*" псевдоразбиением сферы называем разбиение сферы, такое, что:

- это разбиение обладает свойством "pointed";
- любая область разбиения - либо псевдотреугольник, либо pseudo di-gon (псевдодвуугольник).

**Теорема 4.4.** Пусть есть nice псевдоразбиение сферы и число pseudo di-gons равно  $d$ , тогда  $e = 2v + d - 6$ .

Доказательство. (аналогично лекции 3) Обозначим через  $v$  количество вершин графа;  $e$  количество ребер;  $f$  число областей разбиения,  $f_3$  число псевдотреугольников,  $d = f_2$  число псевдодвуугольников. Очевидно, что  $f = f_2 + f_3$ . Из формулы Эйлера получаем:

$$v - e + f = 2$$

Заметим, что углов всего  $2e$ , из них углов, больших  $\pi$ , всего  $v$ . Число выпуклых углов с одной стороны равно  $2e - v$ , а с другой стороны равно  $3f_3 + 2f_2$ . Тогда получаем:

$$3f_3 + 2f_2 = 2e - v$$

Объединив эти формулы, получим:

$$e = 2v + d - 6$$

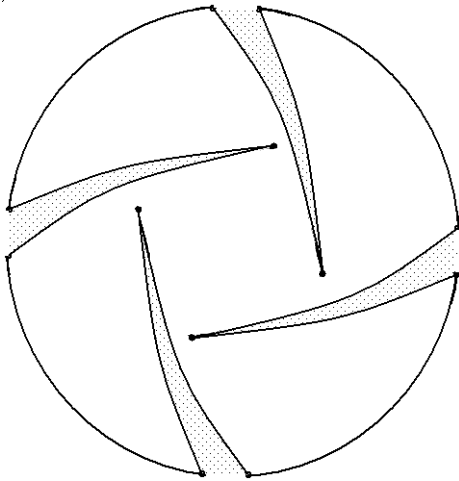
□

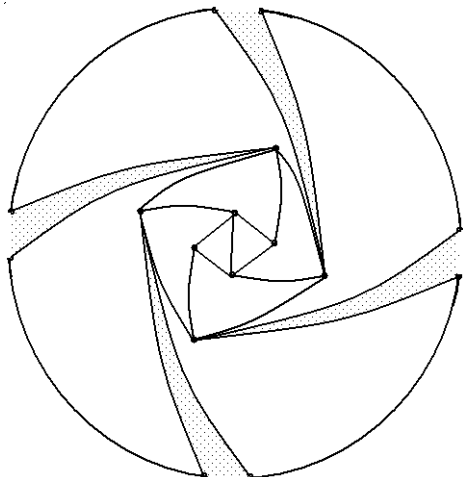
**Следствие.** В условиях теоремы,  $d = 4$  означает, что граф, порождающий разбиение, - ламан+1-граф.

#### Построение гиперболического многогранника.

Для получения гиперболического виртуального многогранника построим ламан+1-граф на сфере в виде pointed псевдоразбиения с четырьмя псевдодвуугольниками. Размещаем двуугольники на сфере и дополняем картинку до nice разбиения.

**Рисунок 4.5.**





Построенный граф обладает 3d-lift-ом и является pointed, следовательно задача выполнена.

Вообще говоря, до появления этой техники построение гиперболических виртуальных многогранников являлось очень сложной задачей. Нужно было строить самопересекающиеся многогранные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  и ассоциированные с ними веера (см. литература к курсу). Теперь вместо трехмерных объектов можно работать с двумерными, что упрощает задачу.

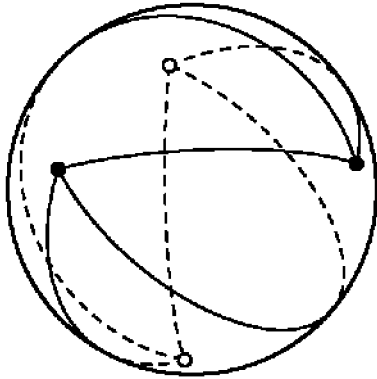
Теорема 4.4 показывает, что в отличие от плоскости, в сферу можно вкладывать (в виде pointed разбиения) графы с большим числом ребер (по сравнению с ламановым) - для этого нужно взять нужное число псевдодвуугольников. Вот аналог теоремы 3.17 для сферы.

**Теорема 4.6.**  $\Gamma$  - ламан+1-граф  $\Leftrightarrow \Gamma$  вкладывается в сферу в виде nice псевдоразбиения с четырьмя *di-gons*.

Доказательство.  $\Leftarrow$  см. следствие выше.

$\Rightarrow$  Представим граф  $\Gamma$  как последовательность конструкций Хеннеберга, примененная к графу  $K_4$  (лекция 3). Граф  $K_4$  можно вложить в сферу в виде nice псевдоразбиения с 4 двуугольниками. Так же, как и в плоском случае, каждая из конструкций Хеннеберга может быть реализована геометрически.

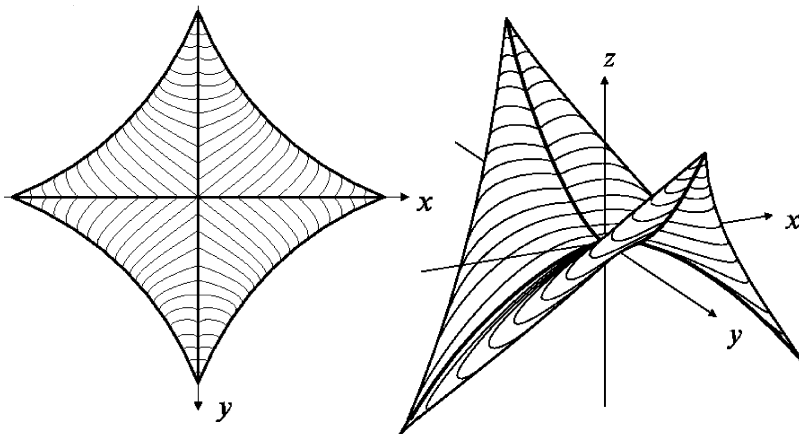
Рисунок 4.7.



**Еще раз о контрпримерах к гипотезе и седловых поверхностях.**  
 На рисунке изображена поверхность Мартинеза-Мора, дающая первый контрпример к гипотезе (задаче А.Д. Александрова).

Опорная функция этой поверхности определена и является гладкой. Сам контрпример к Гипотезе легко получить, прибавив по Минковскому шар достаточно большого радиуса.

Рисунок 4.8.



Эта поверхность задана явно как склейка графиков двух функций:

$$f(x, y) = \pm \frac{xy}{1 - x^4 - y^4} \sqrt[2]{(1 - x^4 - y^4)^{\frac{5}{2}} - 25x^2y^2(x^8 + y^8 + 3(x^4 + y^4 - x^4y^4) + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(|x|^{\frac{4}{5}} + |y|^{\frac{4}{5}} \leq 1)$$

Все ее точки гладкие и седловые (за исключением четырех рогов, где нет ни гладкости, ни седлового свойства).

Однако это не единственный контрпример к гипотезе, (см. Panina, "New counterexamples... литература к курсу) и не единственная седловая поверхность, обладающая таким свойством.

### Задача.

Построить (явно) **другую** седловую поверхность с четырьмя рогами. Пока нас интересует дискретный вариант, то есть гиперболический многогранник.

Как это сделать:

1. Расположить на сфере четыре псевдо 2-угольника так, как на рисунке 4.9-2 (иначе, чем у поверхности Мартинеза-Мора, см. рис. 4.9-1) Здесь мы пользуемся тем, что существуют две комбинаторно различные конфигурации четырех больших полукругов на сфере.

2. Дополнить картинку до "pointed" разбиения. Получим ламан+1-граф (см. теорема 4.6).

3. Построить кусочно-линейную относительно полученного разбиения функцию.

4. Восстановить по этой функции вершины соответствующего виртуального многогранника (лекция 1).

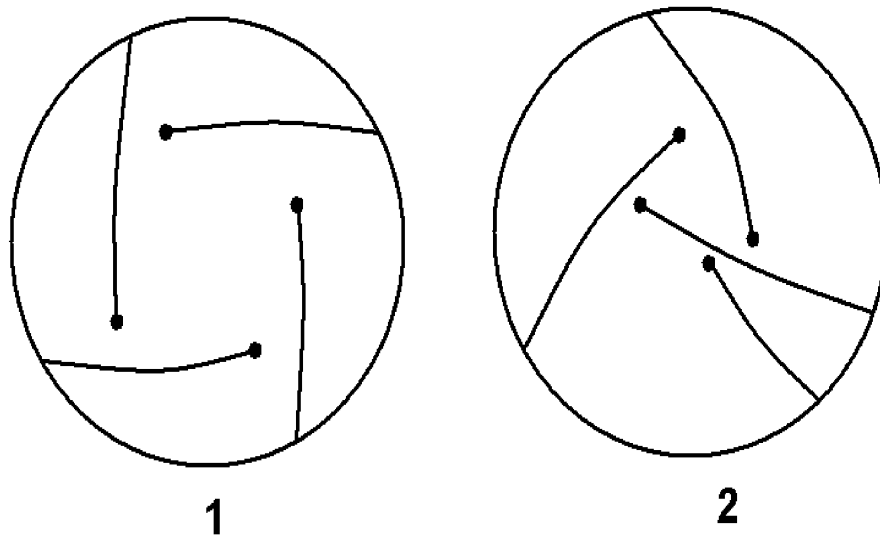
5. Построить сам виртуальный многогранник, пользуясь комбинаторной двойственностью.

Это пока не гладкая поверхность, к которой мы стремимся, но ее кусочно-линейное приближение. Многое может проясниться, если будет получена ее удачная визуализация. Дело в том, что пока совершенно не ясно, как такая поверхность выглядит с точки зрения внешней геометрии. Например, на поверхности Мартинеза-Мора имеются две пересекающиеся линии самопересечения. А как обстоит дело здесь?

Примечание. Есть другой способ построить альтернативную седловую поверхность. Здесь используется совсем другая техника - см.

<http://www.esi.ac.at/Preprint-shadows/esi1796.html>

Рисунок 4.9.



*E-mail address: panina@iias.spb.su, gaiane-panina@rambler.ru*