КОМБИНАТОРИКА МНОГОГРАННИКОВ. ЛЕКЦИЯ 1. ПРИМЕРЫ НЕТРИВИАЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ.

Запись Марины Князевой

Многомерные многогранники комбинаторно гораздо разнообразнее, чем трехмерные. Проиллюстрируем это двумя примерами, аппелируя (пока!) к интуитивным представлениям о многогранниках, ребрах, гранях.

Пример 1. (построенный вручную)

Рассмотрим выпуклые ограниченные многогранники в $\mathbb{R}^3$. У какого многогранника каждые две вершины соединены ребром? Такой многогранник - симплекс, и других нет. (В этом легко убедиться, повозившись с формулой Эйлера: Вершины + Ребра - Грани =2.)

В пространстве $\mathbb{R}^4$ у симплекса каждые две вершины соединены ребром (вершин всего 5). Есть ли в этом пространстве другой многогранник, обладающий этим же свойством?

Чтобы его построить, сначала построим вспомогательный многогранник. Пусть $\mathbb{R}^3 = (x, y, z, v)$. Рассмотрим треугольник $T_1 = ABC$ в плоскости (x, y), обозначим его ребра через l_1, l_2, l_3; и треугольник T_2 в плоскости (z, v), его ребра: m_1, m_2, m_3. Декартово произведение этих треугольников $T_1 \times T_2$ есть четырехмерный многогранник. Перечислим его трехмерные грани: $l_1 \times T_2$, $l_2 \times T_2$, $l_3 \times T_2$, $m_1 \times T_1$, $m_2 \times T_1$, $m_3 \times T_1$.

Рассмотрим пересечения трехмерных граней: $(l_1 \times T_2) \cap (l_2 \times T_2) = A \times T_2$. Это двумерная грань. $(l_1 \times T_2) \cap (m_1 \times T_1) = l_1 \times m_1$- тоже двумерная грань.

Аналогичная проверка показывает, что $T_1 \times T_2$ обладает следующим свойством: **каждые две трехмерные грани пересекаются по двумерным граням.**

Рассмотрим многогранник $(T_1 \times T_2)^{\triangle}$ полярный к построенному. Он комбинаторно двойственен $T_1 \times T_2$ (см. следующая лекция). Это в частности значит, что **каждые две его вершины соединены одномерной гранью, т.е. ребром** (вершин у него 6).

Пример 2. Циклический многогранник.

На самом деле, в $\mathbb{R}^4$ существует многогранник со сколь угодно большим числом вершин, обладающий этим свойством. Построим его.

Рассмотрим $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 4)$, в нем - кривую моментов - образ отображения $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, заданного формулой $\varphi(t) = (t, t^2, \ldots, t^d)$.

Определение 1.1. Возьмем n точек на кривой моментов $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n), n > d, t_1 < t_2 < \ldots < t_n$; выпуклая оболочка этих точек $Conv(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n))$ называется циклическим многогранником и обозначается $C(n, d)$.

Теорема 1.2. (1) *комбинаторика $C(n,d)$ зависит только от n и d;*

(2) *$C(n,d)$ - симплициальный многогранник (каждая его грань - симплекс);*

(3) *каждые две вершины соединены ребром;*

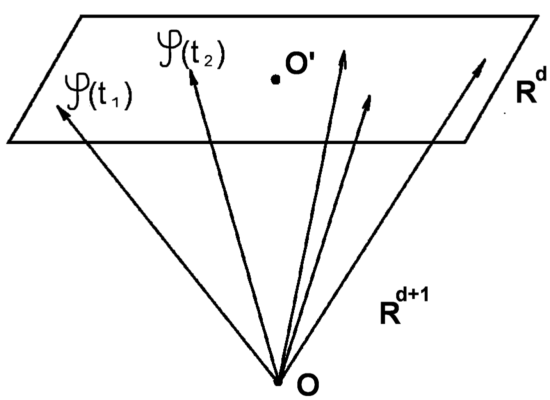
(4) *и более того, каждые $[d/2]$ вершины являются вершинами некоторой грани.*

Доказательство.

(2). Для этого достаточно показать, что любые $(d+1)$ точки на кривой моментов аффинно независимы, т.е. не лежат в одной гиперплоскости.

Представим пространство $\mathbb{R}^d$ как гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, задаваемую уравнением $z=1$. Точки аффинно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы их новые радиус-вектора.

Рисунок 1.3.



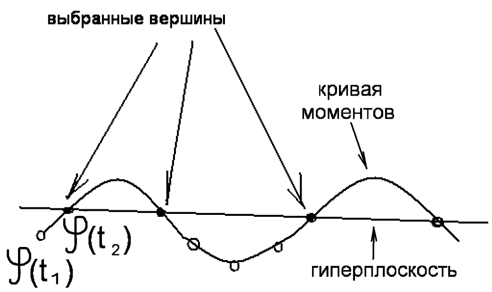
Т.о. нужно доказать, что следующий определитель (определитель Вандермонда) отличен от нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ t_1 & t_2 & ... & t_{d+1} \\ t_1^2 & t_2^2 & ... & t_{d+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ t_1^d & t_2^d & ... & t_{d+1}^d \end{pmatrix} \neq 0$$

Легко видеть, что этот определитель - полином от $t_1, t_2, \ldots, t_{d+1}$. Очевидные нули: $t_i = t_j$, значит этот многочлен делится на $\prod_{i<j}(t_i - t_j)$. Сравнив степени, получаем равенство этих двух многочленов.

Какие из выбранных точек порождают гипергрань? Выбираем d вершин. Чтобы они образовывали грань многогранника, необходимо чтобы остальные точки лежали в одном полупространстве относительно гиперплоскости, натянутой на выбранные точки.

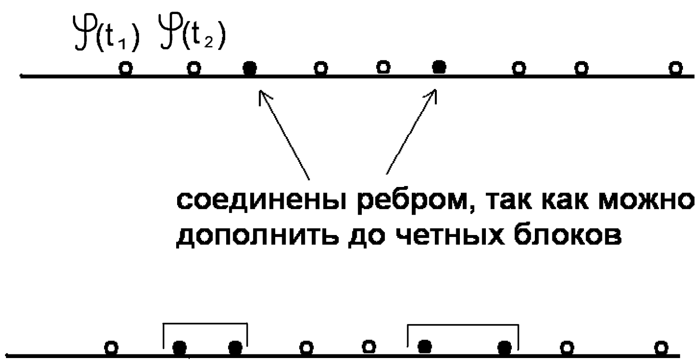
Рисунок 1.4.



Кривая моментов пересекает эту гиперплоскость в выбранных d точках и больше нигде (см. (2)). Тогда остальные точки должны лежать по одну сторону от прямой. Значит, на кривой они должны появляться четными блоками (нечетные блоки могут располагаться лишь по краям). Это условие называется **условием Гейла**. Тем самым доказано (1).

Теперь легко доказать, что каждые две вершины $\varphi(t_i)$ и $\varphi(t_j)$ соединены ребром. Для этого достаточно на прямой дополнить их до четных блоков. Это значит, что эти точки лежат на некоторой грани $C(n, d)$. Поскольку эта грань - симплекс, то они соединены ребром.

Рисунок 1.5.



Легко убедиться, что любые $[d/2]$ точек можно также дополнить до четных блоков, что доказывает (4). $\square$

E-mail address: `panina@iias.spb.su`