ЛЕКЦИЯ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ТЕОРЕМЫ О ГРАФЕ РЕБЕР.

Запись Марины Князевой

Рассмотрим $\mathbb{R}^d$ - d-мерное евклидово пространство с зафиксированными началом координат O и скалярным произведением, точки пространства отождествляем с их радиус-векторами.

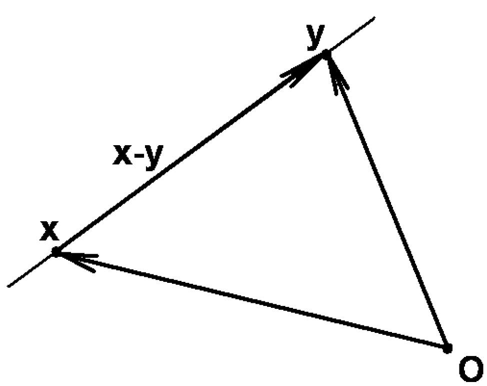
Определение 2.1. Аффинной оболочкой множества точек $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ называется минимальное аффинное пространство, содержащее эти точки.

Лемма 2.2.

$$aff(\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Доказательство сводится к рассмотрению случая для двух точек. Рассмотрим точки (радиус-вектора) x и y. Тогда $x + \lambda(y - x)$ принадлежит прямой (x, y).

Рисунок 2.3.



Заметим, что если $\lambda \in [0, 1]$, то $x + \lambda(y - x)$ попадает в отрезок $[x, y]$. $\square$

Предложение 2.4.

$$dim(aff) \leq n - 1 \quad \square$$

Определение 2.5. Выпуклой оболочкой множества точек $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ называется минимальное выпуклое множество, содержащее точки $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$; обозначается $Conv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$.

Лемма 2.6. $Conv(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$ $\square$.

Теорема 2.7. ***Каратеодори***

Можно обойтись всего $d+1$ точкой:

$Conv(\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \ \exists I \subset \{1, ..., n\} \mid \ \boldsymbol{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ \#(I) \leq d+1\}$.

Доказательство этой теоремы будет дано позднее. □

Определение 2.8. Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного множества точек.

Определение 2.9. Выпуклым многогранником называется ограниченное пересечение конечного числа замкнутых полупространств.

Теорема 2.10. *Приведенные выше определения выпуклого многогранника эквивалентны.*

Доказательство.

$$\Downarrow$$

Пусть $K = Conv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$. Будем считать, что многогранник невырожденный (его размерность совпадает с размерностью пространства: $aff(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \mathbb{R}^d$).

Рассмотрим полупространства h_i^+, такие что

1) h_i - гиперплоскость, являющаяся аффинной оболочкой некоторого подмножества $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$;

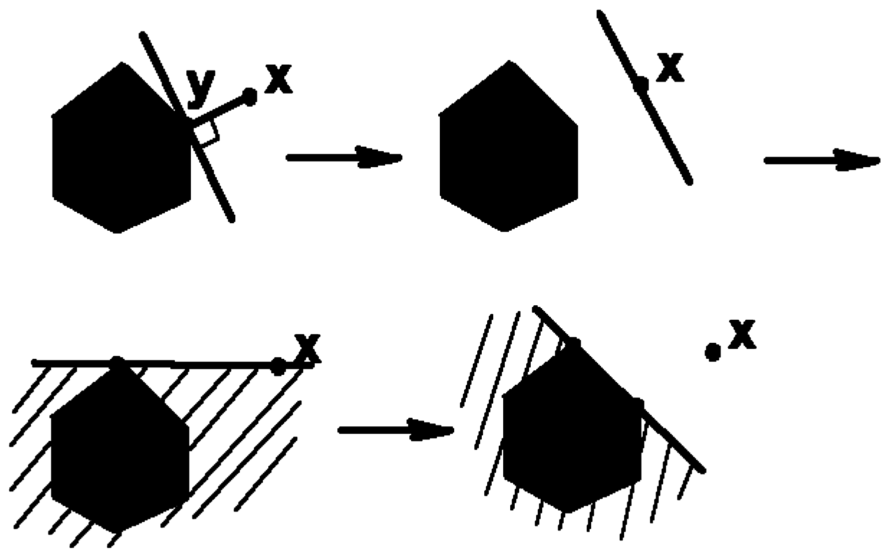
2)$h_i^+ \supset \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$.

Докажем равенство $Conv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \bigcap h_i^+$.

Включение $\subseteq$ очевидно, т.к. справа - некоторое выпуклое множество, содержащее точки $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$, а слева - минимальное из таких множеств.

Докажем $\supseteq$ от противного. Пусть $\exists x \notin Conv$, но $x \in \bigcap h_i^+$. Можно считать, что x не лежит ни на какой из h_i (иначе - подвинем). Пусть y - ближайшая к x точка из $Conv(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$.Дальше см. рис.

Рисунок 2.11.



Точка x оказалась вне одного из полупространств h_i^+. Противоречие.

$\Uparrow$

Гиперплоскости ведут себя также, как и точки - благодаря полярности (см. ниже)

Поэтому доказательство концептуально такое же. □

Следствие 2.12. *Пусть K и L - выпуклые многогранники, тогда:*

- *$K \bigcap L$ - выпуклый многогранник;*
- *$K \bigcap$ плоскость - выпуклый многогранник;*
- *проекция K на плоскость - выпуклый многогранник.*

Для доказательства следствия нужно выбрать подходящее определение выпуклого многогранника. □

Определение 2.13. Грань многогранника K - пересечение K с такой гиперплоскостью h, что $K \subset h^+$. (h^+ - одно из полупространств, ограниченных h.)

Грани бывают разных размерностей.

Иногда удобно считать многогранник K гранью самого K.

Терминология:

$0-$ мерная грань	вершина	$vertex$	$properface$
$1-$ -мерная грань	ребро	$edge$	$properface$
k-мерная грань	k- грань	$k-face$	$properface$
$d-1$-мерная грань	гиперграны	$facet$	$properface$
d-мерная грань	K		

Теорема 2.14. (1) *всякий многогранник - выпуклая оболочка своих вершин;*
(2) *если F_1, F_2 - грани K, то $F_1 \bigcap F_2$ - грань K;*
(3) *$\bigcup\{$собственные грани K $\} = \partial K$(для невырожденных многогранников);*
(4) *Пусть F - грань K. Тогда $\{$грани $F\} = \{$грани K, содержащиеся в $F\}$.*
(5) *F - грань K. Тогда $F = \bigcap$ некоторых гиперграней K.*

Доказательство.

(2) Пусть $aff(F_1)$ задается уравнением : $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 1$, при этом K лежит в полупространстве $\mathbf{a}_1\mathbf{x} \le 1$.

$aff(F_2)$ задается уравнением : $\mathbf{a}_2\mathbf{x} = 1$, при этом K лежит в полупространстве $\mathbf{a}_2\mathbf{x} \le 1$.

Тогда

$F_1 \bigcap F_2 = K \bigcap h$, где гиперплоскость h задается уравнением

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{x} = 2.$$

□

Определение 2.15. Многогранники K и L называются комбинаторно эквивалентными, если $\exists$ биекция φ : {вершины K} $\longleftrightarrow$ {вершины L}, такая что

$\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ - вершины некоторой грани K

$\Leftrightarrow$ $\varphi(x_1), ..., \varphi(x_k)$ - вершины некоторой грани L.

Замечание 2.16. Биекция φ - комбинаторная эквивалентность

$\Longleftrightarrow \varphi$(гиперграни K) = гипергрань L.

Определение 2.17. Многогранники K и L называются комбинаторно двойственными, если $\exists$ биекция φ : {грани K} $\longleftrightarrow$ {грани L}, такая что:

1) грань $F_1 \subset F_2 \Longleftrightarrow \varphi(F_1) \supset \varphi(F_2)$

2) $dim\varphi(F) = d - dimF - 1$.

Задача. Следует ли (2) из (1)?

Две теоремы о графах ребер.

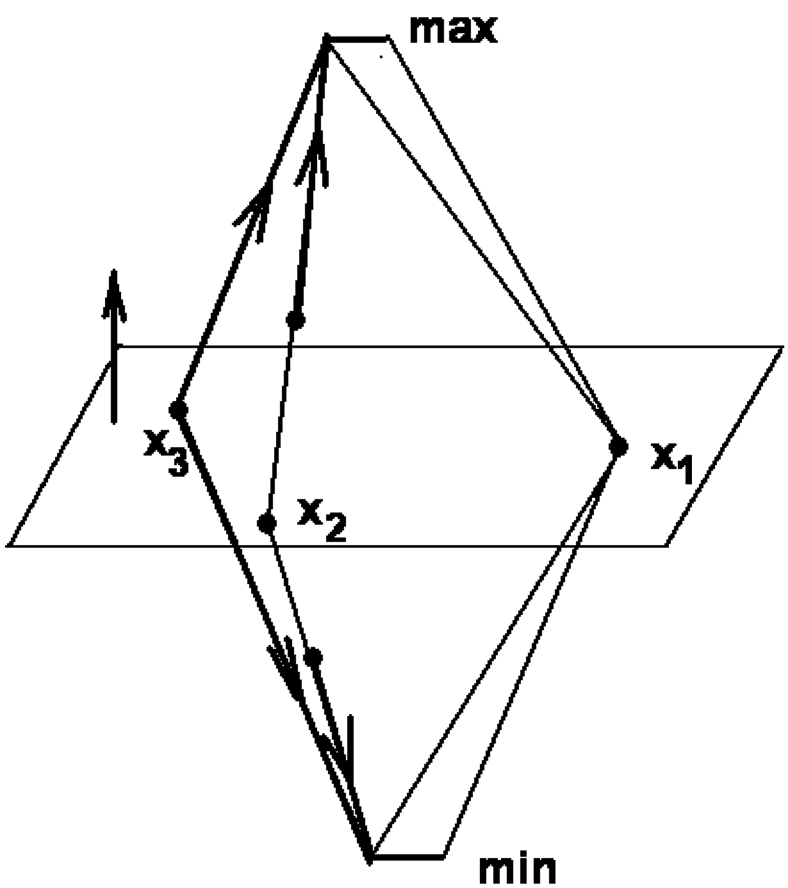
Каждый многогранник порождает граф вершин и ребер.

Определение 2.18. Граф называется k-связным, если выбрасывание любого набора $< k$ вершин оставляет граф связным (вместе с вершинами выкидываются исходящие из них ребра).

Теорема 2.19. *Граф d-мерного многогранника d-связен.*

Доказательство. Пусть для простоты $d = 3$. Пусть K - трехмерный многогранник, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ - его вершины. Докажем, что выкидывание $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ оставляет граф связным. Для этого покажем, что из любой вершины многогранника можно прийти в другую, не "наступая"при этом на $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

Рисунок 2.20.



Натянем на точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ плоскость. Ее нормаль задает "направление вверх". Очевидно, что из любой вершины (в том числе и от $\mathbf{x}_3$), лежащей выше плоскости, можно дойти до максимума. Аналогично, из любой вершины (в том числе и от $\mathbf{x}_3$), лежащей ниже плоскости, можно дойти до миниимума. Поэтому две точки, лежащие выше плоскости, можно соединить путем (через максимум); две точки ниже плосоксти можно соединить путем (через минимум); две точки, лежащие по разные стороны от плоскости, можно соединить путем через максимум, минимум и точку $\mathbf{x}_3$. □

Теорема 2.21. *Граф* $\Gamma(K)$ 3-*мерного многогранника* K *полностью определяет его комбинаторную структуру. Точнее,* $\Gamma(K)$ *изоморфен* $\Gamma(L) \Leftrightarrow K$ *комбинаторно изоморфен* L.

Доказательство. Достаточно заметить следующее: вершины $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ - вершины двумерной грани $\Longleftrightarrow$

(1) $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ образуют цикл;
(2) этот цикл без хорд;
(3) выкидывание цикла оставляет граф связным. $\square$

E-mail address: `panina@iias.spb.su`