ЛЕКЦИЯ 3. ПОЛЯРНОСТЬ. ТЕОРЕМА ШТЕЙНИЦА, СЛЕДСТВИЯ И ОБОБЩЕНИЯ.

Запись Марины Князевой

Полярность

- Полярность "**точка - гиперплоскость**": $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{a}^{\Delta}$,

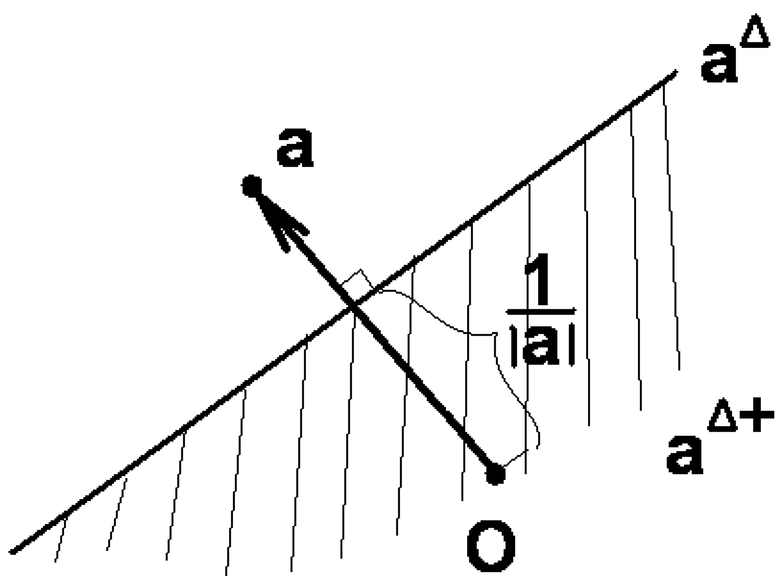
  гиперплоскость $\mathbf{a}^{\Delta}$ задается уравнением $\mathbf{ax} = 1$. Т.о.множество всех точек, кроме O, отображается во множество всех гиперплоскостей, кроме проходящих через O.

  Когда точка едет по отрезку $[a_1, a_2]$, полярная гиперплоскость вращается вокруг $a_1^{\Delta} \bigcap a_2^{\Delta}$.

  Когда точка ездит по треугольнику (a_1, a_2, a_3), полярная гиперплоскость вращается (уже с двумя степенями свободы) вокруг $a_1^{\Delta} \bigcap a_2^{\Delta} \bigcap a_3^{\Delta}$
- Полярность "**точка - полупространство**": $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{a}^{\Delta +}$,

  полупространство $\mathbf{a}^{\Delta +}$ задается неравенством $\mathbf{ax} \leq 1$.

  Рисунок 3.1.



- Полярность "**многогранник- многогранник**".

  Определение 3.2. Пусть K - d-мерный многогранник, содержащий O строго внутри; тогда полярным к K многогранником называется $K^{\Delta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid (x, y) \leq 1 \ \forall y \in K\}$.

Замечание 3.3. Достаточно проверить выполнение неравенства для вершин. Если $K = Conv(V_1, ..., V_n)$, то $K^\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid (x, V_i) \leq 1\ \forall V_i\}$

Полупространств $V_i^{\Delta+}$, полярных вершинам V_i, конечное число и $K^\Delta = \bigcap V_i^{\Delta+}$.

Теорема 3.4.
- *K^Δ -выпуклый многогранник*
- *K комбинаторно двойственен K^Δ.*
- *$K^{\Delta\Delta} = K$.* □

Разумно наблюдать полярность в проективном, а не в евклидовом пространстве.

Определение 3.5. Невырожденный многогранник называется симплициальным, если любая его собственная грань - симплекс.

Замечание 3.6. Для этого достаточно проверить, что все гиперграни - симплексы.

Замечание 3.7. Симплициальный многогранник - многогранник общего положения в следующем смысле: небольшое "шевеление"вершин не меняет его комбинаторную структуру.

Определение 3.8. Невырожденный многогранник K называется простым, если выполнено одно из эквивалентных условий:

(1) K^Δ - симплициальный;
(2) к любой вершине примыкает ровно d ребер;
(3) любая k-мерная грань K есть пересечение ровно $d-k$ гиперграней.

Замечание 3.9. Простой многогранник - многогранник общего положения в другом смысле, чем симплициальный: небольшое "шевеление"аффинных оболочек граней не меняет его комбинаторную структуру.

Конуса

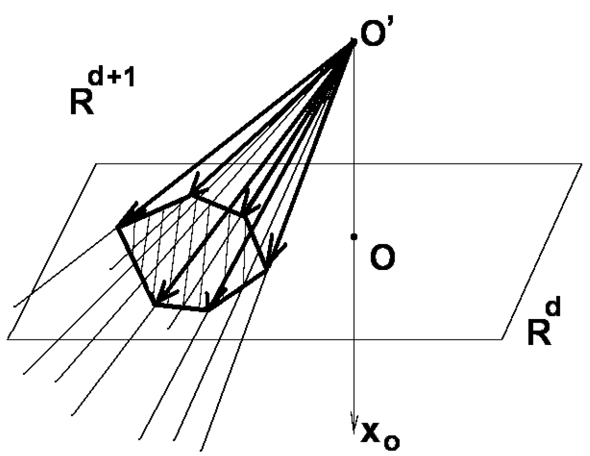
Сделаем все конструкции из аффинных линейными.

Представим $\mathbb{R}^d$ как гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, задаваемую уравнением $x_0 = 0$. Точки $\mathbf{x}$ превращаются в векторы путем приписывания единицы: $\mathbf{x} \to \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$. Теперь поменяем определение аффинной оболочки на определение векторной оболочки, определение выпуклой оболочки на определение выпуклого конуса, стирая условие $\sum \lambda_i = 1$ (оно просто закодировано теперь в уравнении для координаты x_0).

Определение 3.10. Выпуклый конус, натянутый на множество векторов $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ есть $C(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0\}$.

Между выпуклым конусом и выпуклой оболочкой есть простая связь (см. рис.)

Рисунок 3.11.

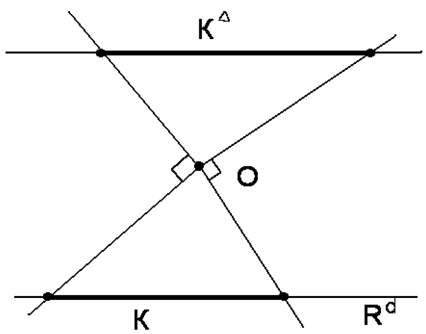


Определение 3.12. Полярность "**конус-конус**":
$C^{\Delta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \forall \mathbf{y} \in C (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0\}$

Теперь легко описать полярность многогранник-многогранник на языке конусов:

- многогранник K вместе с $\mathbb{R}^d$ вкладываем в $\mathbb{R}^{d+1}$
- натягиваем выпуклый конус
- берем двойственный конус
- пересекаем с гиперплоскостью $x_0 = -1$
- все. Получили K^Δ. (Для корректности можно его вернуть в исходную гиперплоскость $x_0 = 1$)

Рисунок 3.13.



Теорема 3.14. ***Теорема Каратеодори для выпуклых конусов:***
$x \in C(x_1, ..., x_n) \iff$
$\boldsymbol{x}$ - положительная линейная комбинация $d+1$ вектора из $\{x_i\}$.

Из нее следует Теорема Каратеодори для выпуклых множеств.

Доказательство. Если есть линейная зависимость, то можно убить один из коэффициентов: с одной стороны есть положительная зависимость, коэффициенты которой можно считать равными 1.

$\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{x}_i$

С другой стороны есть линейная зависимость:

$0 = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i$.

Умножив второе равенство на $(-1/\mu_j)$ и сложив с первым равенством, уменьшаем число слагаемых. Нужно только позаботиться о положительности коэффициентов, для чего берем максимальный из μ_i. $\square$

Теорема Штейница, ее уточнения и следствия.

С каждым трехмерным многогранником K свяжем граф $\Gamma(K)$ его вершин и ребер.

Определение 3.15. Граф Γ - реализуем, если $\exists K : \Gamma = \Gamma(K)$.

Определение 3.16. Граф Γ - простой, если у него нет параллельных ребер, двухвалентных вершин и петель.

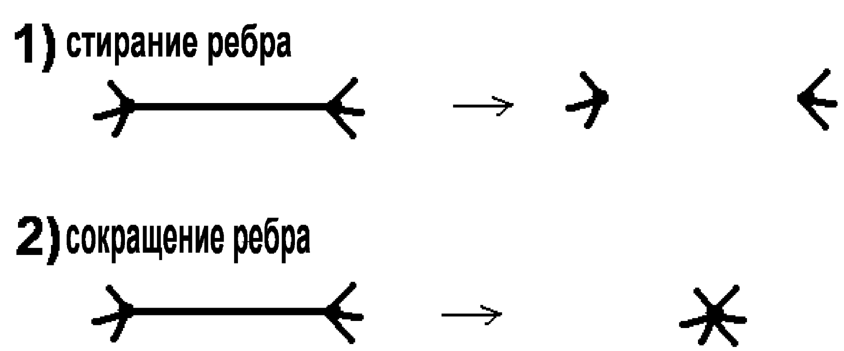
Теорема 3.17. ***Теорема Штейница:***
Граф Γ реализуем тогда и только тогда, когда он

(1) *трехсвязен*
(2) *планарен*
(3) *прост*

На самом деле, мы докажем большее: Из симплекса некоторой комбинацией операций "полярность"и "отрезание вершины"можно получить трехмерный многогранник, реализующий любой такой граф Γ.

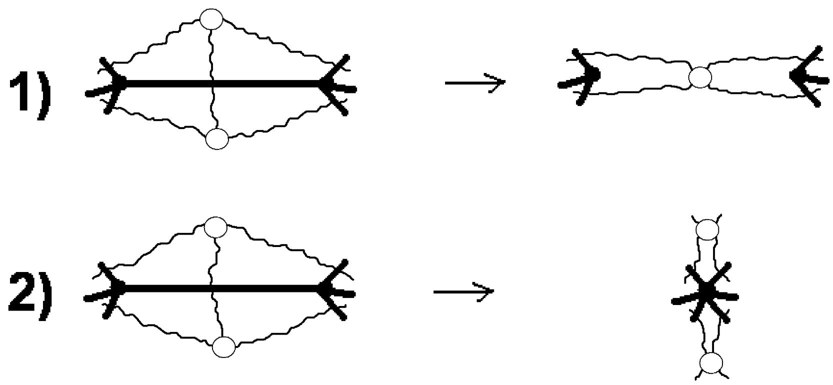
Доказательство.
$\Rightarrow$ - см. предыдущую лекцию.
$\Leftarrow$ Пусть Γ - 3х-связный, простой, планарный и пусть вершин > 3. Рассмотрим операции:
1)Стирание ребра (deletion).
2) Сокращение ребра (contraction).

Рисунок 3.18.



Эти операции двойственны в смысле двойственных графов:

Рисунок 3.19.



Опишем операции над графами,

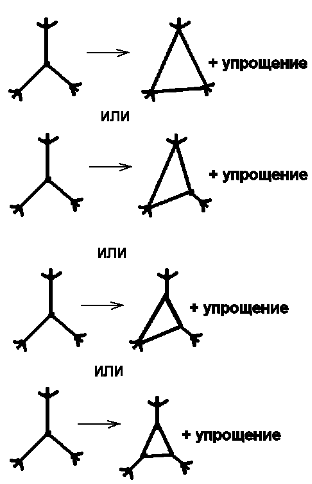
- сохраняющие свойства (1) - (3)
- обратимые
- сохраняющие реализуемость графа.

Это:

- Полярность или двойственность графа (в обычном смысле). Заметим, что у полярного многогранника двойственный граф.
- ΔY - преобразование
- $Y\Delta$ - преобразование

$Y\triangle$ **- преобразование** - локальное преобразование графа по правилу:

Рисунок 3.20.

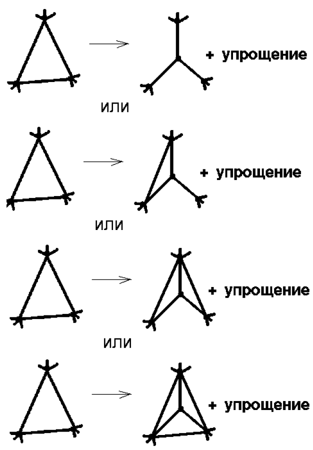


После замены ребер необходимо сделать упрощение (избавиться от параллельных ребер, если такие появились).

Эта операция соотвествует срезанию вершины у многогранника. Следовательно, $Y\Delta$ сохраняет реализуемость графа.

$\triangle Y$ **- преобразование**:

Рисунок 3.21.



После замены ребер необходимо сделать упрощение (избавиться от двухвалентных вершин, если такие появились).

Геометрически $\triangle Y$ означает, что у многогранника "доращиваются"грани. Метрически это не всегда возможно (грани могут "расходиться"), но помогает соображение полярности: $\triangle Y$ - комбинация полярности и $Y\triangle$:

$\Delta Y =$ полярность $\circ$ $(Y\Delta)$ $\circ$ полярность.

Следовательно, ΔY тоже сохраняет реализуемость графа.

Определение 3.22. Граф Γ - минор графа Γ', если Γ можно получить из Γ' некоторым набором сокращений и стираний ребер.

Лемма 3.23.
(1) *Любой решеточный граф сводится с помощью операций полярности, ΔY и $Y\Delta$ к графу симплекса, то есть он* приводим.
(2) *Любой граф, удовлетворяющий условию теоремы, является минором решеточного графа.*
(3) *3- связный минор приводимого графа приводим. (А точнее, ΔY и $Y\Delta$ -преобразования решеточного графа либо порождают согласованное преобразование минора, либо не меняют минор.)*

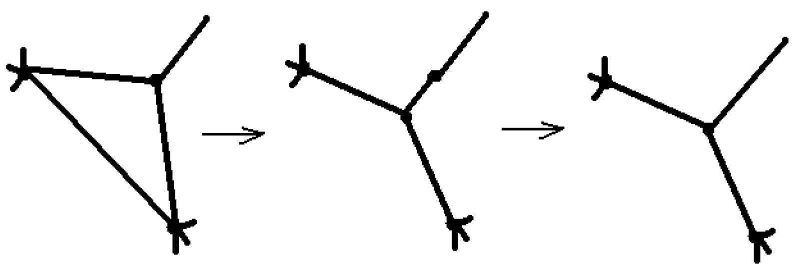
Заметим, что из леммы следует утверждение теоремы. Действительно, из Γ можно получить граф симплекса: вложим Γ в решетку, будем превращать решетку в симплекс, и сам Γ тоже превратится в граф симплекса. Поскольку все операции обратимы, из графа симплекса можно получить Γ, а значит из симплекса отрезанием вершин и полярностью можно получить искомый многогранник.

Доказательство леммы.

(1) Построим две вспомогательные операции: стирание ребра и перекидывание ребра.

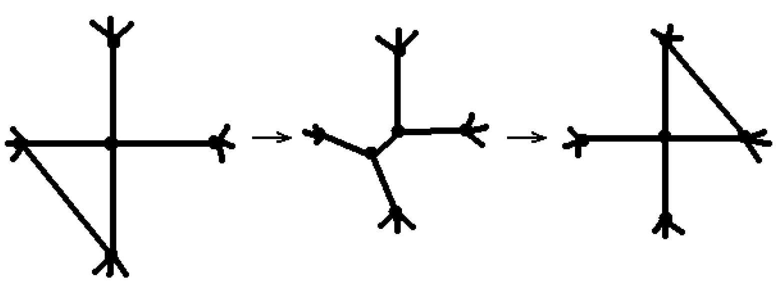
1)**Стирание ребра.** Если есть трехвалентаная вершина, соседние вершины которой соединены ребром, то это ребро можно стереть (сначала применяется $\triangle Y$**-преобразование**, а затем - упрощение):

Рисунок 3.24.



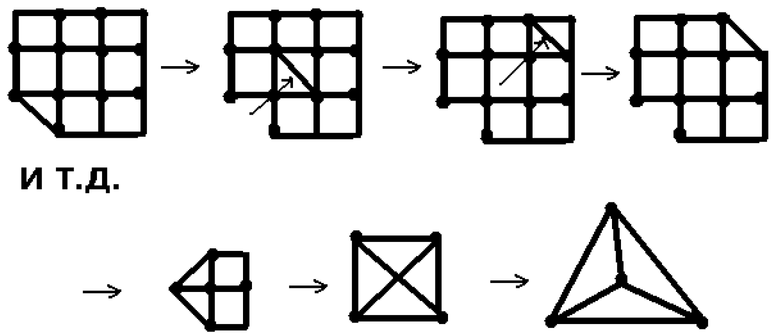
2) **Перекидывание ребра.**Если есть четырехвалентная вершина, и две ее соседние соединены ребром, то ребро можно перекинуть:

Рисунок 3.25.



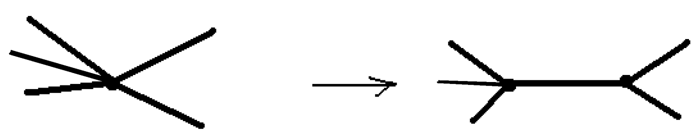
Любой решеточный граф с помощью этих двух операций можно свести к симплексу. Будем перекидывать ребро пока оно не дойдет до границы, где его можно будет стереть либо за счет первой операции, либо за счет упрощения графа (уничтожение параллельного ребра).

Рисунок 3.26.



(2) Главное - разделаться с точками с высокой валентностью. Для этого нужно применить операцию, обратную к **contraction**(см. рис.)

Рисунок 3.27.



Таким способом можно все вершины сделать с валентностью ≤ 4.

(3) Непосредственная проверка.
Теорема Штейница доказана. $\square$

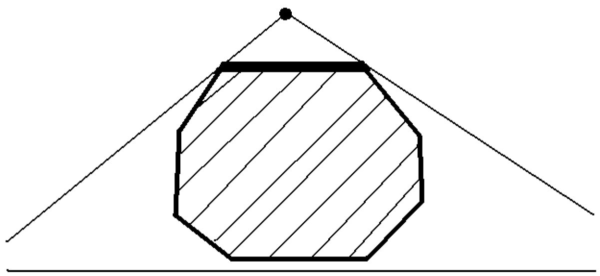
Следствие 3.28. *Любой трехмерный многогранник комбинаторно эквивалентен некоторому рациональному многограннику.*

Стартуя от рационального тетраэдра, производим необходимые преобразования, следя за рациональностью новых точек и плоскостей. $\square$

Следствие 3.29. *Любой планарный граф можно вложить в плоскость так, что его ребрами будут служить прямолинейные отрезки.*

Если граф 3-связный, то реализуем его как граф многогранника, а потом спроецируем на плоскость из центра, лежащего близко к одной из граней.

Рисунок 3.30.



□

Следствие 3.31. *Пространство реализаций трехмерного многогранника (которое пока не определено) стягиваемо.*

Всякая гомотопия пространства реализаций многогранника K порождает гомотопию полярного K^{Δ} и гомотопию K с отрезанной вершиной. □

Все эти утверждения неверны для старших размерностей.

E-mail address: `panina@iias.spb.su`