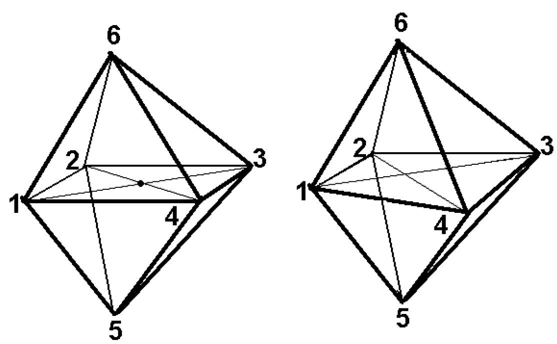
РАСШИРЕНИЕ ЛОРЕНСА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЙЛА. АФФИННАЯ ДИАГРАММА ГЕЙЛА

запись Марины Князевой

Комбинаторика многогранника не всегда позволяет восстановить комбинаторику конфигурации его вершин:

Пример 6.1. *Рассмотрим правильный октаэдр и многогранник, полученный из правильного октаэдра небольшим передвижением точки 4. Комбинаторика конфигурации вершин этих многогранников различна: у правильного октаэдра 24 и 13 пересекаются, значит есть зависимость (+-+-00). У второго многогранника 24 и 13 уже не пересекаются и указанной зависимости нет.*

Рисунок 6.2.



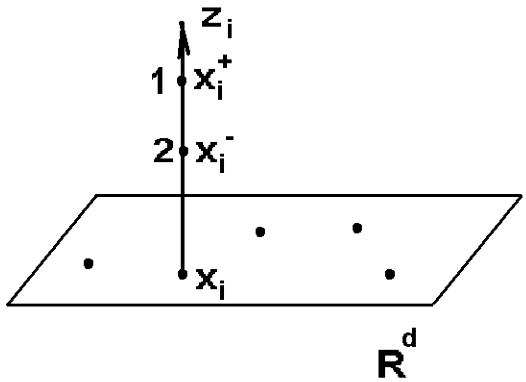
Определение 6.3. Многогранник называется жестким, если комбинаторная эквивалентность многогранников влечет комбинаторную эквивалентность конфигураций вершин: $\forall K' \cong K$ имеем $Ver(K') \cong Ver(K)$.

Например октаэдр - нежесткий.

Расширение Лоренса дает возможность перейти от конфигурации точек к выпуклому многограннику.

Пусть в $\mathbb{R}^d$ есть набор $X = (x_i)$ из n точек. Размерность пространства увеличиваем, добавляя для каждой точки новую координату z_i; "раздваиваем"точку x_i: вместо x_i берем две точки x_i^+ и x_i^- на z_i с координатами 1 и 2. Так вместо набора $X = (x_i)$ из n точек в $\mathbb{R}^d$ получаем набор $L(X) = (x_i^{\pm})$ из $2n$ точек в $\mathbb{R}^{d+n}$.

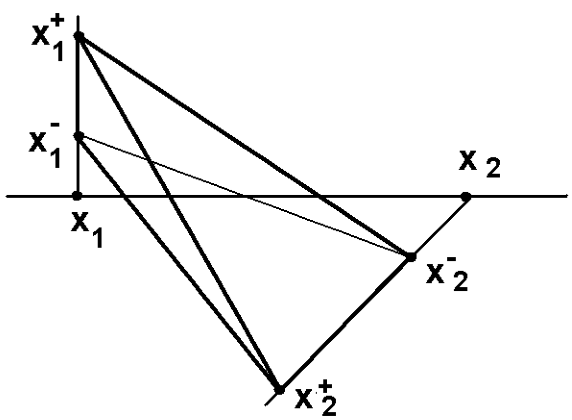
Рисунок 6.4.



Пример.

Пусть $X = (x_1, x_2)$ - набор точек на прямой (в $\mathbb{R}^1$). Применяя расширение Лоренса (z_1 - вертикально, z_2 - горизонтально), получаем $L(X)$ - симплекс в $\mathbb{R}^3$.

Рисунок 6.5.



Теорема 6.6. *Пусть X -конфигурация точек, $L(X)$ -ее расшерение Лоренса. Тогда*

- *Точки $L(X)$ лежат в выпуклом положении*
- *Комбинаторика $Conv(L(X))$ определяется комбинаторикой X и наоборот*
- *Многогранник $Conv(L(X))$ жесткий.*

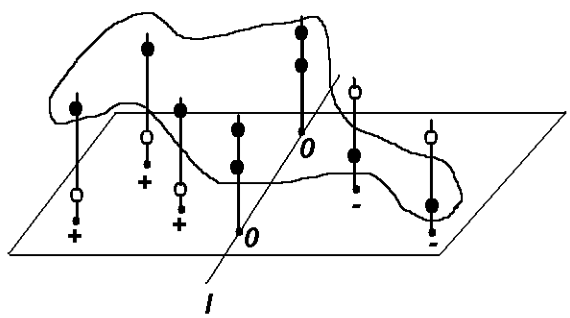
Доказательство.

Покажем, что каждый коцикл в X дает грань $Conv(L(X))$: Пусть l - гиперплоскость, задающая коцикл

$$a = (+, ..., +, -, ..., -, 0, ..., 0).$$

Тогда соответствующую грань порождает гиперплоскость, натянутая на множество точек, которое надо выбирать так: берем верхнюю точку x_i^+ для '+'точек, берем нижнюю точку x_i^- для '-'точек и обе точки $x_i^\pm$ для '0' точек (лежащих на l).

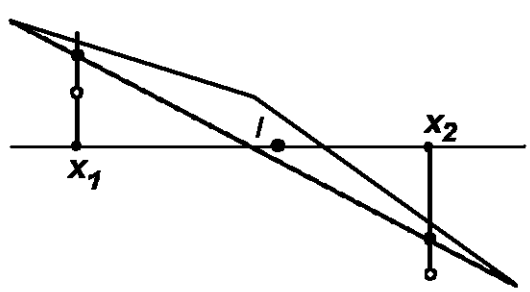
Рисунок 6.7.



То, что эта гиперплоскость порождает грань, можно проверить в лоб: выписать явно уравнение соответствующей гиперплоскости и показать, что она оставляет не вошедшие в нее точки по одну от себя сторону.

Но мы проверим это геометрически. Достаточно рассмотреть случай, когда только одна '+' точка и одна '-' точка. Спроектируем картинку так, чтобы l и точки $x_i^\pm$ для '0' точек спроектировались в одну точку. Тогда картинка становится трехмерной. $\mathbb{R}^d$ вырождается в прямую, l - в точку. Описанная гиперплоскость вырождается в плоскость, которая оставляет неучтенные точки по одну сторону от себя.

Рисунок 6.8.



(3)Если многогранник K комбинаторно эквивалентен $Conv(L(X))$,то он тоже - конструкция Лоренса некоторой конфигурации точек X'. Почему это так? Набор точек $Ver(K) \setminus \{x_i^{+'}, x_i^{-'}\}$ содержится в некоторой гиперплоскости. Значит, прямые $(x_i^{+'}, x_i^{-'})$ пересекают некоторую d-плоскость $e = \bigcap aff(Ver(K) \setminus \{x_i^{+'}, x_i^{-'}\})$ Значит, K - расширение Лоренса конфигурации точек $e \bigcap (x_i^{+'}, x_i^{-'})$.

Комбинаторика граней $Conv(L(X))$ определяет $a - Val(X)$ и следовательно, комбинаторику X . А значит и комбинаторику $L(X)$. □

Преобразование Гейла

Теорема 6.9. ***(О двойственности Гейла)*** *Пусть V - конфигурация n векторов в $\mathbb{R}^{d+1}$; $Dep(V)$, $Val(V)$ - ее зависимости и значения. Тогда существует единственная (с точностью до аффинного преобразования) конфигурация n векторов V^* в $\mathbb{R}^{n-d-1}$, такая, что*

$$Dep(V^*) = Val(V), \quad Val(V^*) = Dep(V).$$

Доказательство. Будем пользоваться матричным языком. В подходящих координатах $V = (I \mid M)$ (считаем, что первые $(d+1)$ вектора линейно независимы и являются базисом, поэтому дают единичную матрицу).

Тогда возьмем $V^* = \begin{pmatrix} M \\ -I \end{pmatrix}^T$

1) Легко проверить, что $V(V^*)^T = 0$.

2) Каждое значение одной конфигурации - зависимость двойственной:
$a \in Val(V^*) \quad \Rightarrow \quad a = zV^* \quad \Rightarrow a^T = (V^*)^T z^T \quad \Rightarrow \quad Va^T = V(V^*)^T z^T = 0 \quad \Rightarrow \quad a \in Dep(V)$.

Следовательно, $Val(V^*) \subseteq Dep(V)$.

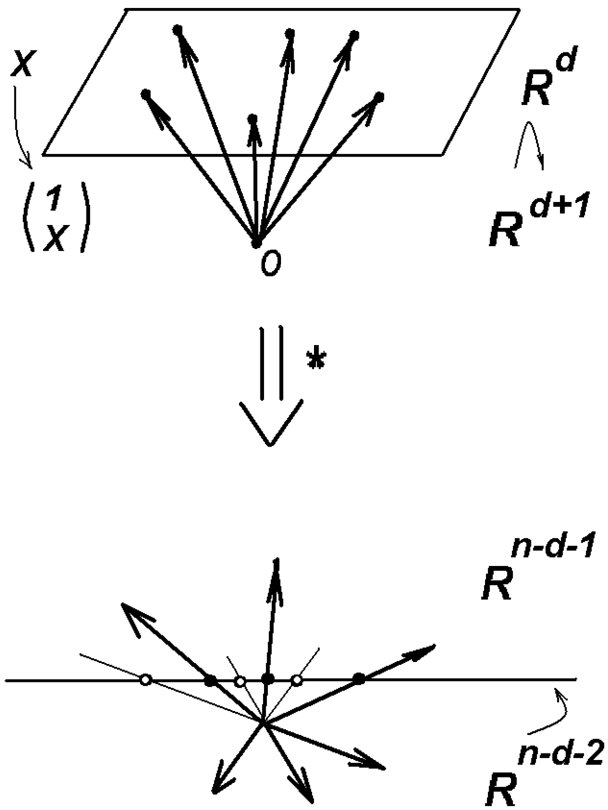
Равенство следует из сравнения размерностей: справа и слева стоят векторные пространства размерности $n - d - 1$. □

Замечание 6.10. V^* называют векторной диаграммой Гейла или преобразованием Гейла конфигурации V.

Аффинная диаграмма Гейла.

Пусть X - аффинная конфигурация точек в $\mathbb{R}^d$. Вкладываем $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^{d+1}$ приписыванием единицы, получим конфигурация векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}$. Применим к ней преобразование Гейла и получим конфигурацию векторов. Выкинем нулевые векторы (но запомним, сколько их было). Пересечем гиперплоскостью и поставим точки двух цветов: черная точка - на месте пересечения вектора с гиперплоскостью, белая - на месте пересечения продолжения вектора с гиперплоскостью. Получили Аффинную диаграмму Гейла.

Рисунок 6.11.



Возможно движение в обратную сторону: от диаграммы Гейла перейти к конфигурации векторов (их длинами можно пренебречь - комбинаторика все равно сохранится), применяя преобразование Гейла, получаем некоторую конфигурацию точек в $\mathbb{R}^d$, которая может отличаться от исходной, но обязательно комбинаторно эквивалентна ей.

Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 6.12. *При каком условии диаграмма Гейла является диаграммой ациклической конфигурации векторов?*

Решение:

Конфигурация векторов ациклическая, если существует вектор значений $(++...+)$. Это значит, что у V^* есть положительная зависимость.

$\sum a_i v_i^* = 0, a_i > 0$. Следовательно,

$$\sum_{v_i^* \text{соответствует черная точка}} a_i v_i^* = \sum_{v_i^* \text{соответствует белая точка}} a_i(-v_i^*)$$

Значит, внутренности выпуклых оболочек черных и белых точек имеют непустое пересечение.

Задача 6.13. *При каком условии диаграмма Гейла является диаграммой выпуклого многогранника?*

Решение1: Если точки лежат в выпуклом положении (соответственно и вектора будут в выпуклом положении), то любую точку можно отделить гиперплоскостью. Это означает, что $\forall i$ существует значение $(+...+0+...+)$ (на i-том месте 0, а все остальные $+$). Значит в двойственной конфигурации векторов $\forall i$ существует зависимость $(+...+0+...+)$, т.е. при выкидывании любой точки из аффинной диаграммы Гейла внутренности выпуклых оболочек черных и белых точек имеют непустое пересечение.

Решение2 (на другом языке):

Теорема 6.14. *Конфигурация ч-б точек в $\mathbb{R}^{n-d-2}$ является диаграммой Гейла выпуклого многогранника $\Leftrightarrow$ $\forall$ гиперплоскости l, натянутой на точки диаграммы справедливо:*

 # (черных точек в l^+) + # (белых точек в l^-) ≥ 2

Доказательство: Точки образуют выпуклый многогранник, если ни одна из них не попадает в выпуклую оболочку других точек. Это означает, что не существует зависимости ровно с одним '-'. Значит, в конфигурации ч-б точек не существует значения ровно с одним '-'. Значит, как бы не проводилась разделяющая гиперплоскость, с каждой стороны остается по крайней мере 2 вектора. □

Задача 6.15. *Что означает наличие нулевого вектора в конфигурации V^*?*

Решение:

Наличие нулевого вектора означает наличие зависимости $(+0...0)$. Поэтому в исходной конфигурации векторов (до применения преобразования Гейла) существует значение (ковектор) $(+0...0)$. Это означает, что сущесвует гиперплоскость, которая содержит все точки, кроме одной.

Задача 6.16. *Пусть имеется диаграмма Гейла выпуклого многогранника. Как закодированы его грани?*

Решение:

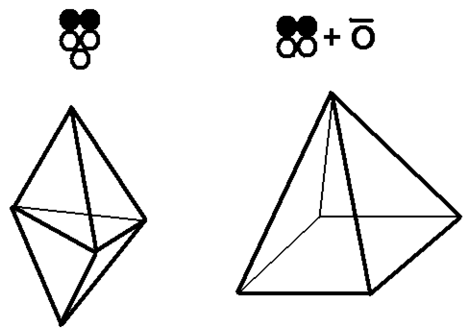
Точки 123 порождают грань $\Leftrightarrow$ существует вектор значений $(000+...+)$. Значит в двойственной конфигурации векторов существует зависимость $(000+...+)$, т.е. если выкинуть точки 1, 2 и 3, то для оставшихся точек выпуклые оболочки черных точек и белых точек пересекаются по своим внутренностям.

Рассмотрим d-мерные многогранники с $d+2$ вершинами. Построим возможные диаграммы Гейла и соответствующие многогранники.

1) $d = 3, n = 5$.

(Диаграмма Гейла нульмерная, т.е. все точки склеились в одну.)

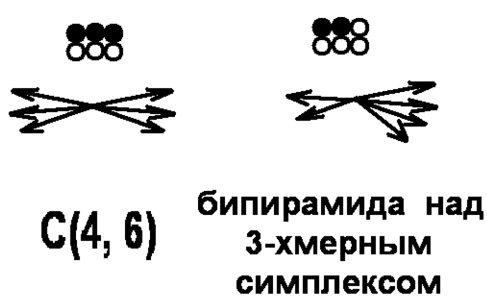
Рисунок 6.17.



2) $d = 4, n = 6$.

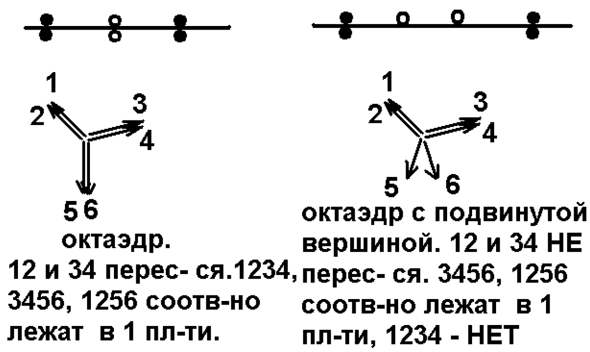
(Диаграмма Гейла нульмерная, т.е. все точки склеились в одну.)

Рисунок 6.18.



Какие многогранники соответствуют данным одномерным диаграммам Гейла?

Рисунок 6.19.



(см. пример с октаэдрами в начале лекции.)

Задача 6.20. *Покажите на простом примере, что минимальные зависимости **не** образуют базис всех зависимостей*

Задача 6.21. *В аффинной диаграмме Гейла выпуклого многогранника K есть две одинаковые точки одного цвета. Что это означает на языке комбинаторики K? Как проверить, является ли K бипирамидой?*

E-mail address: panina@iias.spb.su