РАСШИРЕНИЕ ЛОРЕНСА НА ЯЗЫКЕ ДИАГРАММ ГЕЙЛА. МНОГОГРАННИК, НЕ РЕАЛИЗУЕМЫЙ РАЦИОНАЛЬНО. МНОГОГРАННИК, ГРАНЬ КОТОРОГО НЕЛЬЗЯ ПРЕДПИСАТЬ (ДВА ТИПА)

запись Марины Князевой

Пусть в d-мерном пространстве есть два комбинаторно эквивалентных многогранника K и K'. Из комбинаторной эквивалентности многогранников следует равенство множеств:

$\{$неотриц. ковекторы Ver(K)$\}$ = $\{$неотриц. ковекторы Ver(K')$\}$

$\Leftrightarrow$

$\{$неотрицательные векторы G(K)$\}$ = $\{$неотрицательные векторы G(K')$\}$.

В векторной диаграмме Гейла: $\sum_{i\in I} a_i v_i = 0, a_i > 0$. Перепишем в следующем виде:

$$y = \sum_{Iv_i \text{вектора вверх}} a_i v_i = - \sum_{Iv_i \text{вектора вниз}} a_i v_i.$$

Из этого равенства следует, что вектор y лежит внутри конуса, натянутого на вектора векторной диаграммы Гейла, обращенные вверх (они дадут комбинацию черных точек с точкой y внутри). В то же время, из равенства следует, что вектор y лежит внутри конуса, натянутого на продолжения векторов векторной диаграммы Гейла, обращенных вниз (они дадут комбинацию белых точек с точкой y внутри).

Таким образом, $K \approx K' \Leftrightarrow$

Conv(набора черных точек) пересекает Conv(набора белых точек)в диаграмме Гейла K $\Leftrightarrow$ Conv(соответствующего набора черных точек) пересекает Conv(соответствующего набора белых точек)в диаграмме Гейла K'.

Пример 7.1. *Если в диаграмме Гейла выпуклого многогранника K совпали черная и белая точки, то совпадут им соответствующие точки в диаграмме Гейла комбинаторно эквивалентного многогранника K'.*

(Две совпавшие одноцветные точки могут разъехаться - см. пример с двумя октаэдрами из лекции 6.)

Пример 7.2. *Если в диаграмме G(K) одна точка лежит между двумя точками другого цвета, то в G(K') эта конфигурация сохраняется.*

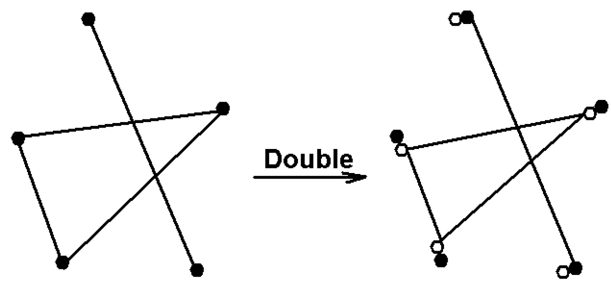
Многогранник K - жесткий тогда и только тогда, когда множество $\{$ неотриц. векторы G(K)$\}$ определяет множество $\{$ векторы G(K)$\}$.

Расширение Лоренса на языке диаграмм Гейла.

Опишем процедуру удвоения точек в диаграмме Гейла:

Заменим каждую точку $G(K)$ на две слипшиеся точки: черную и белую.

Рисунок 7.3.



Получим диаграмму Гейла $G(K')$ некоторого многогранника ,K', причем каждому вектору в $G(K)$ (а ему соответствует пересечение выпуклых оболочек каких-то точек) соответствует неотрицательный вектор (пересечение внутренностей выпуклых оболочек отдельно черных и белых точек) в $G(K')$. Таким образом, $G(K')$ - диаграмма Гейла жесткого многогранника. Оказывается этот многогранник - расширение Лоренса K:

Теорема 7.4. *Коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{расширение Лоренса}} & L(X) \\ \downarrow \text{ афф Гейл} & & \downarrow \text{афф Гейл} \\ G(X) & \xrightarrow{\text{удвоение точек}} & G(L(X)) \end{array}$$

Доказательство:

Проследим за комбинаторикой конфигураций.

ковектор $X \to$ грань $Conv(L(X))$ =неотрицательный ковектор $L(X) \to$ неотрицательная зависимость 1-ого объекта.

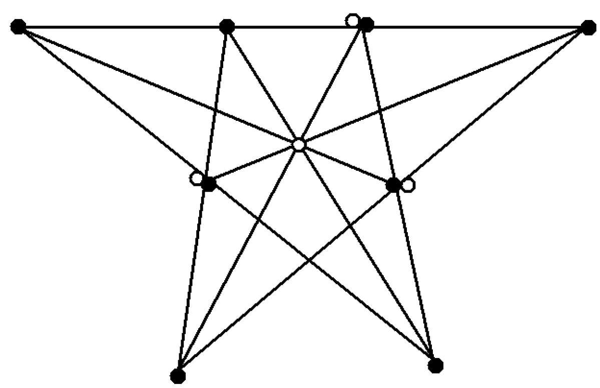
С другой стороны, ковектор $X \to$ зависимость $G(X) \to$ неотрицательная зависимость 2-ого объекта.

Из жесткости обоих объектов следует комбинаторная эквивалентность полученных объектов. $\square$

Пример 7.5. ***8-мерный многогранник, нереализуемый комбинаторно с рациональными координатами всех вершин.***

Конфигурация точек, представленная на рисунке, не реализуется со всеми рациональными координатами: Пятиугольник в центре должен быть проективно эквивалентен правильному, а конструкция правильного пятиугольника включает Золотое сечение.

Рисунок 7.6.



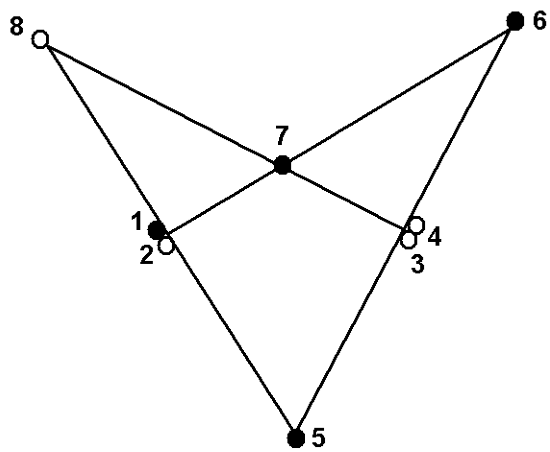
На рисунке - диаграмма Гейла некоторого многогранника K из $\mathbb{R}^8$. У него 12 вершин. Утверждаем, что никакой другой многогранник $K' \approx K$ не обладает рациональными координатами вершин. Действительно, $G(K')$ имеет те же коллинеарности точек, что и $G(K)$, что влечет иррациональность.

Следствие теоремы Штейница ("**предписывание грани**, см. задачи к лекциям 3-4"): *пусть в $\mathbb{R}^3$ есть многогранник K с k-угольной гранью; тогда $\forall k$-угольника F $\exists K'$, $K \approx K$, такой, что F - грань K'.* (Т.е. не меняя комбинаторно многогранник, можно добиться того, чтобы его грань приняла любую наперед заданную форму.)

В старших размерностях это следствие неверно. Приведем пример такого 4-мерного многогранника, форму октаэдральной грани которого предписать нельзя.

Пример 7.7. *Данная на рисунке конфигурация точек - диаграмма Гейла выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^4$ с 8 вершинами.*

Рисунок 7.8.

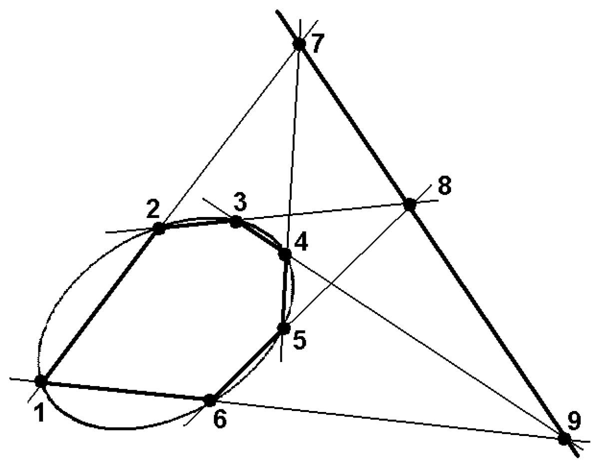


Пусть многогранник $K' \approx K$. При этом точки 1 и 2 дают положительную зависимость (++0...0) на диаграмме Гейла и значит положительный ковектор в конфигурации вершин K'; значит, все точки, кроме 1 и 2, образуют гипергрань. Это октаэдр, в диаграмме Гейла которого точки 3 и 4 склеены, значит в диаграмме Гейла есть вектор (00+-0...0), а в конфигурации вершин K' - ковектор (00+-0...0); откуда следует, что точки 5, 6, 7, 8 лежат в 2-плоскости. Значит, любой многогранник, комбинаторно эквивалентный K, не может иметь октаэдральную грань с вершинами в общем положении.

Пример 7.9. *Приведем пример 5-мерного многогранника, у которого нельзя предписать форму двумерной грани.*

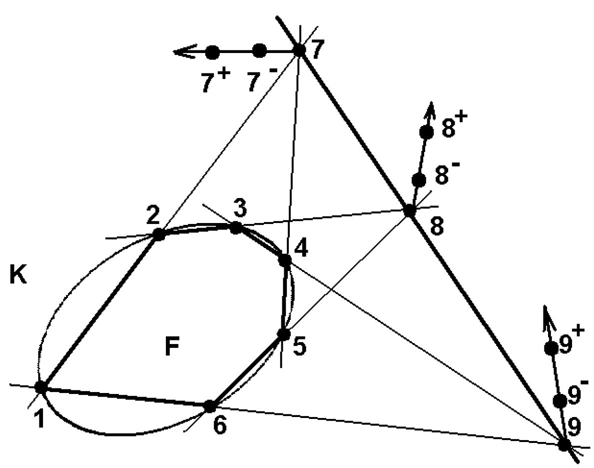
Теорема Паскаля: *точки 1 - 6 лежат на конике* $\Leftrightarrow$ *точки 7, 8, 9 коллинеарны.*

Рисунок 7.10.



Проведем частичное расширение Лоренса, раздвоив только точки 7 - 9 на рисунке.

Рисунок 7.11.



Получим многогранник $Conv(1{-}6, 7^{\pm}, 8^{\pm}, 9^{\pm})$ *в* $\mathbb{R}^5$. *Точки 1 - 6 образуют плоскую грань. Точки 7, 8, 9 мы стерли, но они присутствуют неявно - их можно восстановить.*

Пусть многогранник $K' \approx K$. *Тогда* K' *получается из аналогичной конфигурации таким же путем (сохраняются все инцидентности) т.к.:*

$7^{\pm}, 8^{\pm}, 9^{\pm}$ *образуют грань* K. $\Rightarrow$ $7^{\pm'}, 8^{\pm'}, 9^{\pm'}$ *лежат в одной гиперплоскости.* $\Rightarrow$ $7', 8', 9'$ *коллинеарны и совпадут с точками пересечений соответствующих прямых с плоскостью грани* F. *Далее, в исходной конфигурации* $7 = (12) \bigcap (45)$, *это же сохранится и в* K'.

Поэтому у всякого $K' \approx K$ *точки 1' - 6' (по теореме Паскаля) лежат на конике. Значит если взять 6-угольник с вершинами не на конике, он не сможет служить гранью многогранника* K'.

E-mail address: `panina@iias.spb.su`