ТЕОРЕМА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ

запись Марины Князевой

Напомним, что мы рассматриваем два типа комбинаторных объектов: **конфигурации точек** (в этой лекции мы ограничимся двумерными конфигурациями, они неожиданно разнообразны) и **выпуклые многогранники** (многомерные - теоремы Штейница показывают, что комбинаторика трехмерных многогранников проста).

Пространство реализаций конфигурации точек X - это множество всех конфигураций (с точностью до аффинного преобразования), эквивалентных X . На нем есть естественные топология и полуалгебраическая структура.

Вот точные определения:

Определение 8.1.

- **Пространство реализаций конфигурации точек**.

  Пусть $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_2, ..., \ \mathbf{x}_n)$ - двумерная конфигурация точек, причем точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ не лежат на одной прямой. Пространством реализаций конфигурации $\mathbf{X}$ называется множество матриц $\mathbf{M}$ размера $2\times(n-3)$ таких, что конфигурация $\mathbf{X}$ комбинаторно эквивалентна конфигурации $(\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{M})$

  (Напомним, что конфигурацию мы отождествляем с матрицей, столбцы которой - координатные векторы точек конфигурации.)

- **Пространство реализаций выпуклого многогранника**.

  Пусть $K = Conv(\mathbf{X})$ - выпуклый многогранник, причем точки $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{d+1}$ аффинно независимы в любой его комбинаторной реализации. Пространством реализаций многогранника $\mathbf{K}$ называется множество матриц $\mathbf{M}$ размера $d\times(n-d-1)$ таких, что многогранник $\mathbf{K}$ комбинаторно эквивалентен многограннику $Conv(\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{M})$

Определение 8.2. Множество $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^N$ называется примарным полуалгебраическим множеством, если оно задается системой алгебраических уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} f_i = 0 \\ g_j > 0, \end{cases}$$

где f_i, g_j - полиномы над $\mathbb{Q}$.

Замечание 8.3. Пространство реализаций точечной конфигурации $\mathbf{X}$ есть примарное полуалгебраическое множество.

Доказательство.

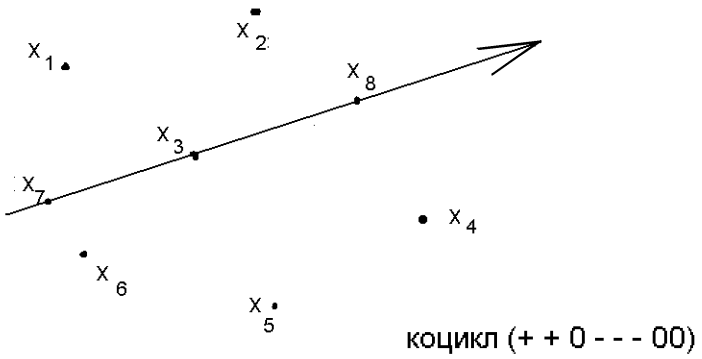
Комбинаторная эквивалентность конфигураций означает (по определению) равенство множеств их коциклов. Напомним, что коцикл - это вектор из знаков "+", "−"и "0", построенный по следующему правилу. Нужно взять ориентированную прямую l, проходящую через две точки конфигурации X и построить вектор так:

На месте с номером i стоит "+"если x_i лежит слева от l;

На месте с номером i стоит "−"если x_i лежит справа от l;

На месте с номером i стоит "0", если x_i лежит на прямой l:

Рисунок 8.4.



Условия коцикла ("точка лежит справа от прямой", "точка лежит на прямой) легко выразить через определители матриц, составленных из координат векторов конфигурации: Пусть для определенности коцикл порожден элементами x_1, x_2. Тогда "+"точки образуют с точками x_1, x_2 правые тройки, а "−"точки - левые тройки. Получаем следующую систему полиномиальных уравнений и неравенств.

$$\begin{cases} det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & "+" \end{pmatrix} > 0, \\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & - \end{pmatrix} < 0, \\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & "0" \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

К ней нужно добавить аналогичные системыдля всех остальных коциклов конфигурации $\mathbf{X}$. Получим систему, задающую пространство реализаций $\mathbf{X}$. □

Стабильная эквивалентность примарных полуалгебраических множеств означает их гомотопическую эквивалентность + дополнительные

требования алгебраичности отображений. При первом чтении точные определения (см. ниже) можно опустить и иметь ввиду просто гомотопическую эквивалентность.

Определение 8.5. Рациональная эквивалентность полуалгебраических множеств - гомеоморфизм f такой, что f и f^{-1} - рациональные отображения (с рациональными коэффициентами).

Определение 8.6. Стабильная проекция $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ - обычная проекция $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N'}$, у которой слои - выпуклые многогранники (возможно, неограниченные), задаваемые системой линейных уравнений и неравенств. Требуется, чтобы коэффициенты этой системы полиномиально зависели от координат в $\mathbb{R}^{N'}$.

Определение 8.7. Два полуалгебраических множества называются стабильно эквивалентными, если они принадлежат одному классу эквивалентности, порожденному рациональными эквивалентностями и стабильными проекциями.

Ниже приведено самое простое изложение самой слабой из теорем универсальности. В действительности же Мнев доказал то же утверждение, но для конфигураций точек без коллинеарностей (гораздо более сильный факт).

Теорема 8.8. ***Теорема универсальности (Н.Е. Мнев, 1985)***
Для любого примарного полуалгебраического множества $\mathfrak{A}$

- *найдется конфигурация точек $\boldsymbol{X}$ на плоскости, пространство реализаций которого стабильно эквивалентно множеству $\mathfrak{A}$;*
- *найдется выпуклый многогранник K, пространство реализаций которого стабильно эквивалентно множеству $\mathfrak{A}$.*

Следствие 8.9. *Пространство реализаций может быть топологически сколь угодно сложным: несвязным, нестягиваемым, с нетривиальными когомологиями.*

План доказательства:

Шаг 1: Научимся кодировать конфигурациями точек простые многочлены.

Шаг 2: Сложные многочлены выразим через простые. Полуалгебраическое множество заменим на простое ("Shor normal form"), ему стабильно эквивалентное. Оно задается простыми многочленами.

Шаг 3: Соберем все воедино. Получится теорема универсальности для конфигураций точек.

Шаг 4: Теперь легко получить теорему универсальности для многогранников, применив расширение Лоренса.

Итак,

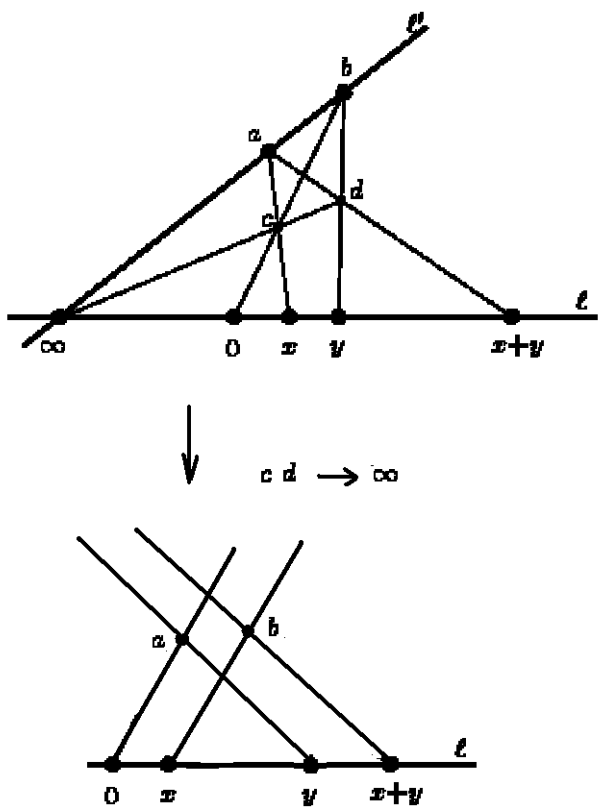
Шаг 1 Закодируем плоскими конфигурациями точек простые многочлены (Von Staudt Construction). Построения будем проводить только с помощью линейки.

1) Пусть $x + y = z$.

Отметим на проективной шкале l точки с координатами x, y. Точку с проективной координатой z можно построить следующим простым способом (см. рисунок). Через точку ∞ проводим произвольную прямую l'; на ней выбираем любые две точки a и b; соединяем a с x, b с 0 и точку пересечения полученных прямых обозначаем через c; соединяем b с y, ∞ с c и точку пересечения полученных прямых обозначаем через d. Точка пересечения прямой (ad) и проективной оси l соответствует значению $x+y$.

Заметим, что в отличие от аффинного случая, все построения произведены с помощью линейки!

Рисунок 8.10.

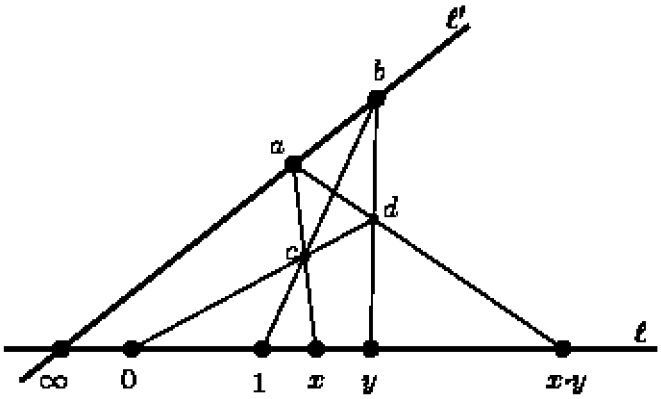


В этом легко убедиться, если проективным преобразованием отправить всю прямую cd. При этом проективная шкала станет аффинной. Мы получаем две пары параллельных прямых (которые пересекаются в точках,

отправленных на бесконечность) и треугольники, из равенства которых следует требуемое.

2) Аналогичным способом можно закодировать многочлен $z = xy$. Опять точки a и b выбираются произвольно. Соединяем a с x, b с 1 и точку пересечения полученных прямых обозначаем через c; соединяем b с y, 0 с c и точку пересечения полученных прямых обозначаем через d. Точка пересечения прямой (ad) и проективной оси l имеет проективную координату $x \cdot y$.

Рисунок 8.11.



Чтобы в этом убедиться, надо отправить на бесконечность прямую ab. При этом получаем две пары параллельных прямых (которые пересекаются в точках, отправленных на бесконечность) и две пары подобных треугольников, из коэффициента подобия которых следует требуемое.

Шаг 2

Теорема Шора (Shor normal form)(1991):

Каждое примарное полуалгебраическое множество стабильно эквивалентно множеству, задаваемому неравенствами

$$1 = x_1 < x_2 < ... < x_n$$

и некоторыми многочленами типа

$x_i + x_j = x_k, \quad k \neq i, k \neq j$

$x_i x_j = x_k, \quad k \neq i, k \neq j$

Доказательство мы не приводим. Поясним только, что упрощение многочленов достигается введением (большого числа) новых переменных. Например, чтобы простой многочлен $y = x + 17$ привести к требуемому виду, нужно ввести 16 новых переменных:

$x_1 = 1$

$x_2 = x_1 + 1$
$x_3 = x_2 + 1$
...
$y = x_{16} + 1$

Шаг 3

Исходное полуалгебраическое множество $\mathfrak{A}$ преобразуем в нормальную форму Шора. Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathfrak{A}$. Выберем две пересекающиеся прямые l и l'. Прямая l будет играть роль проективной шкалы - на ней расположим точки с координатами $1 = x_1 < x_2 < ... < x_n$.

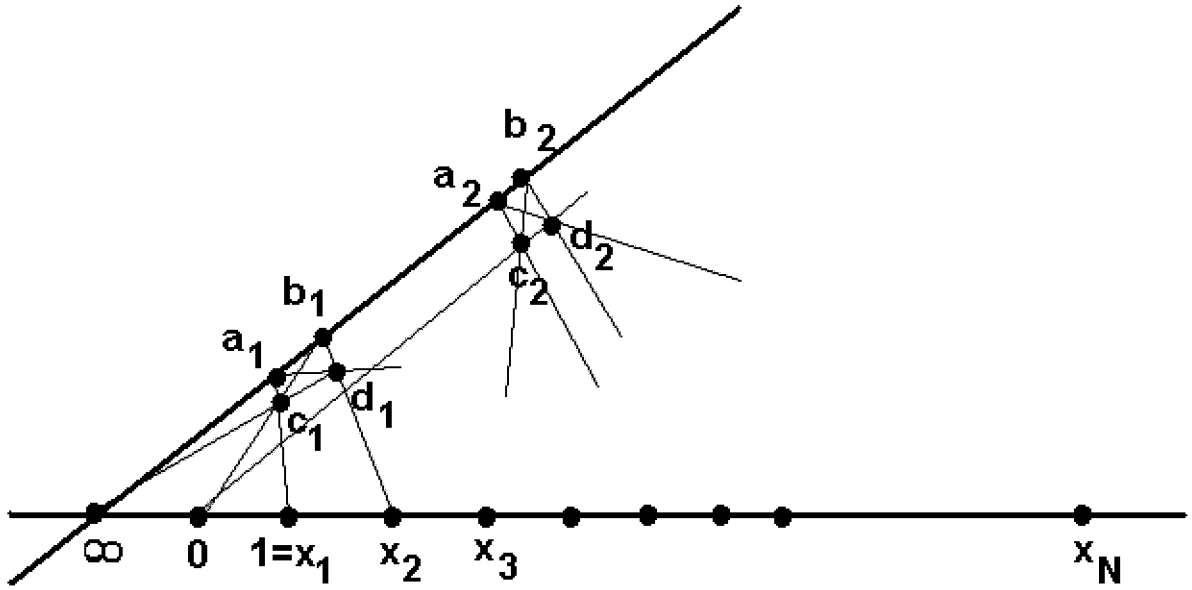
Для каждого полинома (упорядочим их: $f_1, f_2, ...$)поочередно добавим к конфигурации четверку точек (a_i, b_i, c_i, d_i), кодирующую этот полином. При этом проследим за выполнением следующих условий.

(1) Верхняя пара точек четверки (a_i, b_i) лежит на прямой l';
(2) Каждая следующая пара точек (a_i, b_i) лежит правее предыдущей;
(3) Точки четверки (a_i, b_i, c_i, d_i) близки друг к другу;
(4) Появившиеся новые прямые не разделяют предыдущие c_i и d_i;
(5) На самом деле есть еще некоторые условия; их цель - добиться определенности в комбинаторном расположении новых точек.

Выполнения (3) и (4) можно добиться сблизив точки a_i, b_i.

Все эти ограничения на выбор новых точек описываются в терминах нескольких линейных неравенств и уравнений, значит в терминах стабильной проекции.

Рисунок 8.12.



Таким образом, произведено стабильное поднятие: к имеющимся точкам $\infty, 0, 1 = x_1, x_2, ..., x_n$ добавляем все четверки точек a_i, b_i, c_i, d_i, кодирующие соотношения $x_i + x_j = x_k, \quad x_i x_j = x_k, \quad k \neq i, k \neq j$, причем точки a_i, b_i "бегают"по стягиваемым множествам - лучам.

Мы построили конфигурацию точек **X**. Всякая эквивалентная ей конфигурация **X'** порождена точками $x'_1, ...x'_n$, координаты которых на соответствующей проективной шкале дают точку из $\mathfrak{A}$.

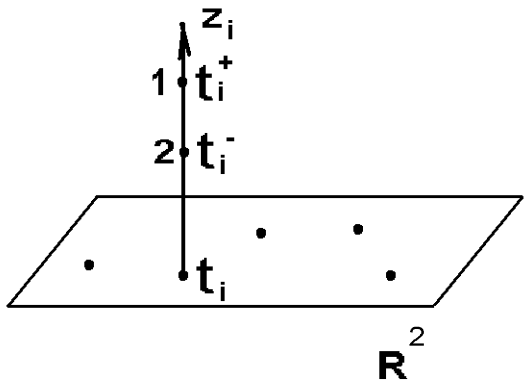
Мы доказали утверждение 1 теоремы универсальности.

Шаг 4

Расширение Лоренса дает возможность перейти от конфигурации точек к выпуклому многограннику.

Пусть $X = (t_i)$. Размерность пространства увеличиваем, добавляя для каждой точки новую координату z_i; "раздваиваем"точку t_i: вместо t_i берем две точки t_i^+ и t_i^- на z_i с координатами 1 и 2. Так вместо набора $X = (t_i)$ из N точек в $\mathbb{R}^2$ получаем набор $L(X) = (t_i^{\pm})$ из $2N$ точек в $\mathbb{R}^{2+N}$.

Рисунок 8.13.



Получим многогранник $Conv(L(\mathbf{X}))$. При этом "старые"точки заменяются парой новых, но конфигурация "старых"точек восстанавливается по расширению Лоренса. Поэтому никакая комбинаторная информация исходной конфигурации не теряется. Конфигурация **X** и ее расширение Лоренса $L(\mathbf{X})$ определяют друг друга (комбинаторно) однозначно (с точностью до выбора пары точек на новой оси, а это описывается стабильной проекцией). Значит, пространства реализаций X и $Conv(L(\mathbf{X}))$ стабильно эквивалентны друг другу и, следовательно, множеству $\mathfrak{A}$. □

Следствие 8.14. *Для любого конечного расширения поля $\mathbb{Q}$ существует выпуклый многогранник, нереализуемый комбинаторно с координатами вершин в этом поле.*

E-mail address: panina@iias.spb.su