ТЕОРЕМА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ (ЛЕКЦИЯ НИКОЛАЯ МНЕВА)

запись Марины Князевой

Рассматриваем плоские конфигурации занумерованных точек. Три точки, лежащие в общем положении, своей нумерацией порождают ориентацию: по часовой стрелке (положительная ориентация), против часовой стрелки (отрицательная) и 0-ориентация (когда точки коллинеарны). Таким образом определяется отображение множества троек точек на множество ориентаций: $\chi : [\,\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix}\,] \mapsto \{+,-,0\}$.

(Это еще один равносильный способ задать комбинаторику конфигурации точек.)

Абстрактная функция $\chi : [\,\begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix}\,] \mapsto \{+,-,0\}$ (необязательно происходящая из точечной конфигурации) называется ориентированным матроидом. Сопоставим ориентированному матроиду множество конфигураций, которые его реализуют: $\chi \to \{\chi\}$.

Теорема 9.1. ***Теорема универсальности. (Н. Мнев, 1978-1983)*** *Для любого примарного полуалгебраического многообразия M существует ориентированный матроид χ, множество реализаций которого $\{\chi\} \approx M$.*

Под знаком $\approx$ понимается стабильная эквивалентность, которая:

(1) сохраняет простой гомотопический тип;
(2) локально сберегает все особенности с точностью до гладкого фактора.

Локальная теорема универсальности в смысле (2) верна над любыми полями характеристики 0 (например над полем $\mathbb{C}$), и с некоторыми ограничениями верна над полями конечной характеристики. (Что замечательно, т.к. тогда нет уже ориентации, остается только коллинеарность/неколлинеарность.) Однако, известно, что над полями Галуа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ теорема уже не верна ни в каком смысле.

История проблемы.

В 1978 году А.М. Вершик на студенческом семинаре поставил задачу: доказать, что пространство реализаций набора точек в общем положении связно. В 1983 году Н. Мнев решил эту задачу, доказав теорему универсальности[1]. В дальнейшем этими задачами занимались на семинаре Рохлина. (Виро, Харламов.)

Финашин доказал, что конфигурации вплоть до 7 точек имеют связные пространства реализаций; Суворов построил пример конфигурации 9 точек, пространство реализаций которого несвязно (см. Циглер, глава 6). Н. Мнев построил пример конфигурации 15 точек, пространство реализаций которого несвязно[2]. Шор придумал нормальную форму Шора[3] что упростило доказательство. Появилось множество приложений. Например, Стефан Смейл придумал экономические задачи, которые оказались прямым приложением этой теории.

Приложения.

1. Рассмотрим графы с фиксированными длинами ребер - шарнирные механизмы. Как устроено их пространство реализаций?

Thurston доказал, что замкнутая цепочка дает гладкое многообразие.

Теорема универсальности для шарнирных механизмов.

(Steiner[4], Капович, Милсон[5]) От конфигурации точек через проективную двойственность можно перейти к конфигурациям прямых. Их инцидентности задаются шарнирным механизмом (см. рис.)

Интересный обзор - R. Vakil "Murphy's Law in algebraic geometry: Badly-behaved deformation spaces"(math.AG/0411469) - включает множество алгебро-геометрических задач, использующих эту теорию.

[1]Полное доказательство Мнева содержится в диссертации *"Топология многообразий комбинатрных типов проективных конфигураций и выпуклых многогранников", кандидатская диссертация, 116 стр., Ленинград, 1986.* Диссертация доступна на домашней странице http://www.pdmi.ras.ru/∼mnev

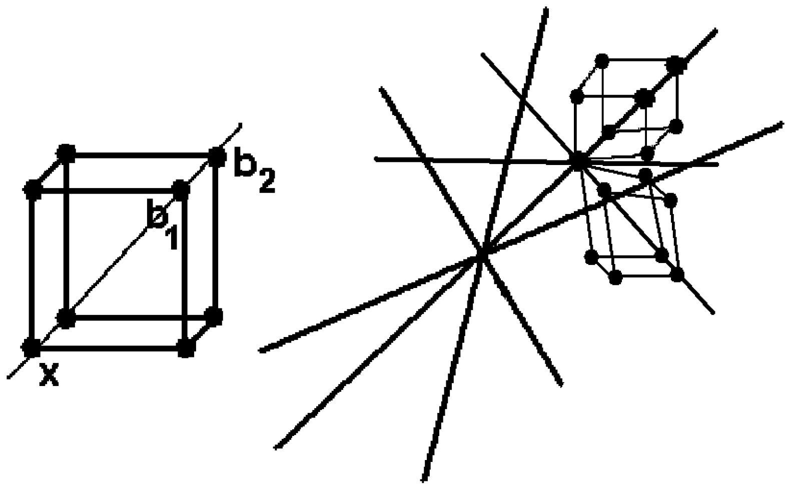
[2]Короткое описание доказательства Мнева, работы Финашина и Суворова и концептуальная статья Вершика об универсальности вышли в сборнике
Topology and geometry—Rohlin Seminar. Edited by O. Ya. Viro. Lecture Notes in Mathematics, 1346. Springer-Verlag, Berlin, 1988. xii+581 pp.
S. M. Finashin, Configurations of seven points in RP^3 (pp. 501–526);
N. E. Mnëv, The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties (pp. 527–543);
P. Suvorov, Isotopic but not rigidly isotopic plane systems of straight lines (pp. 545–556);
A. M. Vershik, Topology of the convex polytopes' manifolds, the manifold of the projective configurations of a given combinatorial type and representations of lattices (pp. 557–581).

[3]Shor, Peter W. Stretchability of pseudolines is NP-hard. Applied geometry and discrete mathematics, 531–554, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[4]Jordan, D.; Steiner, M. Configuration spaces of mechanical linkages. Discrete Comput. Geom. 22 (1999), no. 2, 297–315.

[5]Kapovich, Michael; Millson, John J. Moduli spaces of linkages and arrangements. Advances in geometry, 237–270, Progr. Math., 172, Birkha"user Boston, Boston, MA, 1999.; Kapovich, Michael; Millson, John J. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages. Topology 41 (2002), no. 6, 1051–1107

Рисунок 9.2.



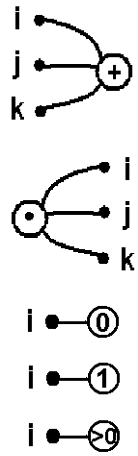
2. **Комбинаторная вещественная алгебраическая геометрия.**

Напомним, что нормальная форма Шора - задание полуалгебраического многообразия элементарными уравнениями и неравенствами:

$$\begin{cases} x_i + x_j = x_k, \\ x_i \cdot x_j = x_k, \\ x_i = 0, \\ x_i = 1, \\ x_i > 0. \end{cases}$$

Любую систему такого вида можно превратить в граф с пометками:

Рисунок 9.3.



И наоборот, граф с пометками восстанавливает подобную систему.

Теорема. (Н. Мнев, H. Lombardy, M.-F. Roy)[6]: есть 22 правила перестройки графа, такие, что 2 графа задают изоморфные полуалгебраические многообразия тогда и только тогда, когда они перестраиваются друг в друга с помощью этих правил.

Гипотеза: на ориентированных матроидах есть перестройки, такие, что пространства реализаций стабильно эквивалентны $\Leftrightarrow$ матроиды перестраиваются перестройками.

3. **Углубление теоремы Штейница.**

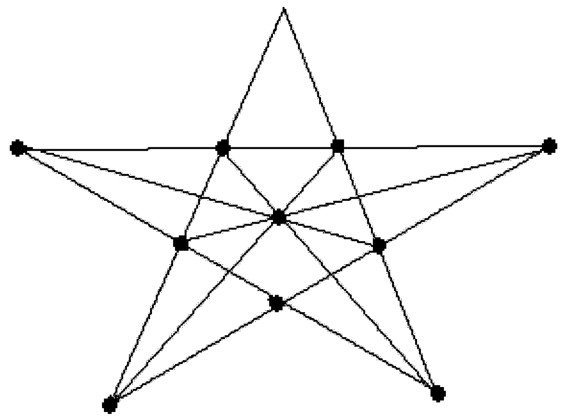
Гипотеза: 2 многомерных многогранника имеют стабильно эквивалентные пространства реализаций $\Leftrightarrow$ они перестраиваются с помощью некоторого конечного списка перестроек друг в друга.

4. **Инварианты пространств реализаций.**

Изображенную на рисунке конфигурацию "не пошевелить".

[6]H. Lombardi, N. Mnev and M.-F. Roy, The Positivstellensatz and small deduction rules for systems of inequalities, Math. Nachr. **181** (1996), 245–259;

Рисунок 9.4.



Как комбинаторно задать эту информацию? Для матроида с n вершинами строим т.н. многогранник Гельфанда следующим образом. Тройки точек в общем положении назовем базами; в $\mathbb{R}^{n-1}$ берем симплекс, его вершинам сопоставим вершины матроида. Возьмем те 2-грани, которые соответствуют базам. Выпуклая оболочка их барицентров = многогранник Гельфанда.

"Насильно" объявим нулевой какую-то базу (а на самом деле ее ориентация + или -) так, чтобы матроид остался реализуемым. Такие вырождения называются минорами. Им соответствуют некоторые подмногогранники многогранника Гельфанда. Иногда из них можно составить "замощение"многогранника Гельфанда. Теорема Лафорга[7] утверждает, что если у многогранника Гельфанда нет замощений такого типа, то исходная конфигурация точек жесткая (пространство реализаций нульмерно – является конечным набором точек).

Из комбинаторики замощений многогранника Гельфанда восстанавливается ровно половина всей алгебро-геометрической информации о пространстве реализаций.

Фундаментальным открытым вопросом является возможно лучшее описание замощений в комбинаторных терминах. Вопрос о необходимости условия Лафорга открыт и крайне важен в контексте алгебраической геометрии.

E-mail address: `panina@iias.spb.su`

[7]L. Lafforgue, "Chirurgie des grassmannienne", IHES/M/02/31, http://www.ihes.fr/PREPRINTS/M02/Resu/resu-M02-31.html;
Sean Keel, Jenia Tevelev, "Chow Quotients of Grassmannians II", math.AG/0401159;