О НЕИЗОТОПНЫХ СЕДЛОВЫХ ЕЖАХ

Князева М.Г., Панина Г.Ю.

УДК 514.113.5

В 2001 году французский математик И. Мартинес-Мор построил следующий интересный объект (см. [3]). Это ориентированная замкнутая поверхность M в $\mathbb{R}^3$ (см. рис.1), обладающая следующими свойствами.

(1) Поверхность M гладкая и седловая во всех своих точках (за исключением четырех, называемых *рогами*).

(2) Поверхность M обладает корректно определенной непрерывной опорной функцией. (Для ежей опорная функция имеет простой геометрический смысл. В точке $\xi \in S^2$ ее значение равно расстоянию со знаком от начала координат до касательной к ежу плоскости с нормалью ξ. Здесь S^2 – единичная сфера с центром в начале координат.)

В частности, это свойство означает, что гауссово отображение $M \to S^2$ инъективно.

(3) Опорная функция h_M поверхности M гладкая, и ее график есть гладкая седловая поверхность.

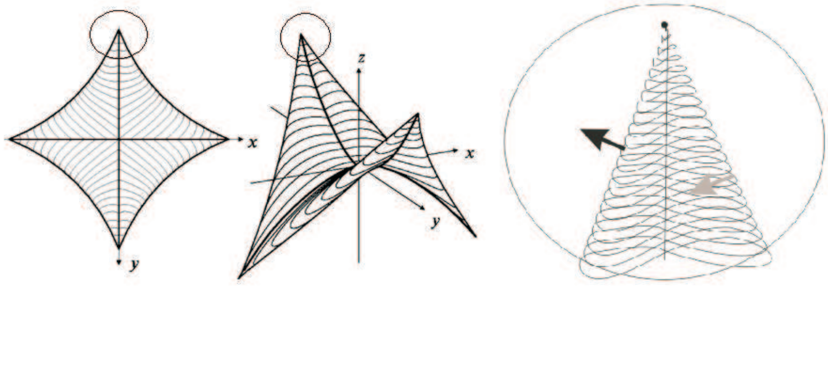

Рис. 1. Поверхность M

Определение 1.1. Замкнутые поверхности, обладающие свойством (2), называются *ежами*. Замкнутые поверхности, обладающие свойствами (1-3), называются *седловыми (или гиперболическими) ежами с четырьмя рогами*.

Ежи образуют группу относительно операции сложения по Минковскому. Эта группа порождена полугруппой выпуклых тел, и соответствие "ёж $\leftrightarrow$ его опорная функция" есть естественное продолжение полугруппового изоморфизма "выпуклое тело $\leftrightarrow$ его опорная функция".

Поверхность M интересна сразу с нескольких точек зрения:

(1) Она представляет собой новый тип седловой поверхности (пропущенный в существовавшей до сих пор классификации).
(2) Она порождает контрпример к следующей гипотезе А.Д. Александрова (подробнее об этом – см. [3-6]).
Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – гладкое выпуклое тело. Если для постоянной C в каждой точке границы ∂K выполнено неравенство $R_1 \leq C \leq R_2$, то тело K – шар (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны ∂K).
(3) Другие приложения – см. [6].

Определение 1.2. Будем говорить, что седловые ежи с четырьмя рогами L и N *изотопны*, если существует непрерывное семейство N_t, $t \in [0,1]$ седловах ежей с четырьмя рогами, таких, что $N_0 = L$ и $N_1 = N$.

Настоящая статья анонсирует следующий результат:

Теорема 1.3. *Существует поверхность N, обладающая свойствами (1-3), неизотопная поверхности M. При этом пример поверхности N построен явно.* □

Построенная поверхность N порождает новый контрпример к гипотезе А.Д. Александрова и представляет новый тип седловой поверхности (по сравнению уже известными, включая поверхность M).

Мы располагаем двумя способами ее построения. У каждого из них есть свои преимущества и свои недостатки. В обоих случаях сначала строится дискретный аналог седлового ежа – так называемый *гиперболический виртуальный многогранник* N' (здесь используется техника, разработанная в [2] и развитая далее в [4], [5]).

Благодаря существующей технике сглаживания (см. [5]), гладкая поверхность N получается автоматически.

- Первый способ построения (Г.Ю. Панина).

  Мы строим не саму многогранную поверхность N', а двойственный объект – график ее опорной функции Г, натягивая его на специальным образом построенное зацепление. При этом остаются неясными внешнегеометрические свойства самой поверхности N'. Она, разумеется, определяется графиком Г, но явные вычисления и визуализация технически трудны.

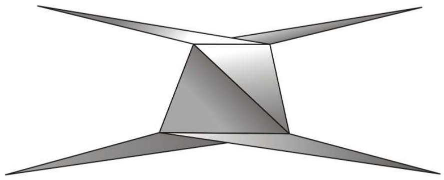

Рис. 2. Поверхность М. Князевой

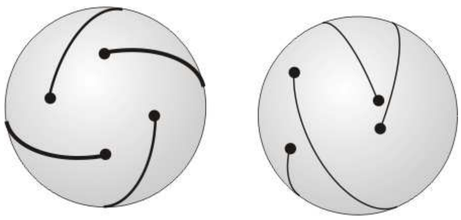

Рис. 3. Неизотопные конфигурации больших полукругов

- Второй способ (М.Г. Князева).

  Форма искомой поверхности была угадана, после чего был предъявлен гиперболический виртуальный многогранник (рис. 2). Это поверхность тетраэдра с четырьмя приклеенными дважды покрытыми треугольниками.

Неизотопность ежей M и N вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.4. *Образ рога всякого гладкого гиперболического ежа при отображении Гаусса содержит большой полукруг (т.е. половину большого круга).* □

Следовательно, всякий гиперболический еж с 4 рогами порождает конфигурацию четырех непересекающихся больших полукругов на единичной сфере.

Однако известно (см. [3]), что еж M порождает конфигурацию I, тогда как ежи N порождают конфигурацию II (именно эта цель преследовалась при построении N). А эти две конфигурации (см. рис. 3) неизотопны, т. е. они не переводятся одна в другую непрерывным движением, избегая самопересечений.

Библиография

[1] А. Д. Александров, *О теоремах единственности для замкнутых поверхностей,* ДАН СССР **22** (1939), № 3, 99-102.

[2] А. Пухликов, А. Хованский, *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*, Алгебра и Анализ **4** (1992), № 2, 161-185.

[3] Y. Martinez-Maure, *Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math. **332** (2001), № 1, pp.41-44.

[4] G. Panina, *New counterexamples to A.D. Alexandrov's uniqueness hypothesis*, Advances in Geometry **5** (2005), 301-317.

[5] G. Panina, *On hyperbolic virtual polytopes and hyperbolic fans*, CESJM **4** (2006), № 2, 270-293.
[6] Сайт, посвященный гиперболическим виртуальным многогранникам http://club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html

E-mail address: marinakn@mail.ru, panina@iias.spb.su

Князева М.Г., Панина Г.Ю., Институт информатики и автоматизации РАН, В.О., 14 линия, д. 39, Санкт-Петербург, 199178