АФФИНИАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ВЫПУКЛОСТЬ.

записано Князевой М.

1. Аффинная зависимость.

Рассматриваем множества из некоторого числа точек в пространстве R^d с фиксированной ситемой координат. Точки ассоциируются с их радиус-векторами.

Для двух различных точек x_1 и x_2 прямая, проходящая через них, есть множество: $\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Определение 1.1. Аффинной оболочкой $aff(x_1, ..., x_n)$ множества точек $x_1, ..., x_n$ называется минимальное афинное пространство, содержащее все эти точки.

Для системы из n точек x_i их аффинная оболочка: $aff(x_1, ..., x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i | \sum a_i = 1\}$.

Определение 1.2. Точки $x_1, ..., x_n$ называются аффинно зависимыми, если $dim(aff(x_1, ..., x_n)) \leq n-2$.

Лемма 1.3. *Условие аффинной зависимости точек $x_1, ..., x_n$ эквивалетно каждому их следующих условий:*

- *вложим R^d в R^{d+1} в качестве гиперплоскости, не проходящей через 0; вектора пространства R^{d+1}, порожденные точками $x_1, ..., x_n$, являются линейно зависимыми;*
- *$\exists a_i \in \mathbb{R}$ (не все из них нулевые), такие что: $\sum a_i = 0; \sum a_i x_i = 0$*

2. Выпуклость.

Выпуклым множеством называем множество, которое вместе с каждой парой своих точек содержит и весь отрезок с концами в этих точках. Выпуклой оболочкой $Conv(X)$ множества точек X называется минимальное выпуклое множество, содержащее множество X.

Теорема 2.1. *Для множества X в R^d его выпуклая оболочка*

$$Conv(X) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i | x_i \in X, n \in \mathbb{N}, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$$

Доказательство.

1. $\supset$

Обозначим множество, стоящее справа от знака равенства как M.

Для $n = 2$ комбинация - точка на отрезке. Следовательно, содеражится в $Conv(X)$. Далее - индукция по n.

2.$\subset$

Заметим, что само $X \in M$, т.к. можем подобрать коэффициенты соответствующим образом.

Также M - выпуклое, т.к. с каждыми своими точками $\sum a_i x_i$ и $\sum b_i x_i$ это множество содержит и весь отрезок с концами в этих точках:

любая точка отрезка есть $\lambda \sum a_i x_i + (1-\lambda) \sum b_i x_i = \sum (\lambda a_i + (1-\lambda) b_i) x_i$. То есть, это точка из M.

А т.к. $Conv(X)$ - есть по определению минимальное выпуклое множество, содержащее X, то оно содержится в некотором выпуклом множестве $M \supset X$. □

Теорема 2.2. *Теорема Каратеодори.*

$$Conv(X) = \{\sum_{i=1}^{d+1} a_i x_i | x_i \in X, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} a_i = 1\}$$

Доказательство.

Множество справа от знака равенства обозначим M. Докажем одно включение.

Пусть $x \in Conv(X)$. Покажем, что $x \in M$.

$x \in Conv(X) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Если $n \leq d+1$, то $x \in M$ доказано.

Если $n > d+1$, то опишем процедуру, позволяющую уменьшать количество слагаемых этой суммы.

Вектора $\{x_i\}$ аффинно зависимы (т.к. их по крайней мере $d+2$ в пространстве R^d), значит $\exists b_i, \sum b_i = 0, \sum b_i x_i = 0$.

Умножим на λ и вычтем из $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Получим $x = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda b_i) x_i$, причем $\sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda b_i) = 1$.

Положим, что λ очень маленькое, близко к 0. Будем его постепенно увеличивать до тех пор, пока из всех коэффициентов $a_i - \lambda b_i$ какое-то не обратится в 0. Так, количество слагаемых уменьшится на одно.

Применяя эту процедуру, постепенно уменьшаем количество слагаемых. □

Лемма 2.3. *Лемма Радона.*

$A \subset R^d, \sharp(A) = d+2 \Longrightarrow \exists A_1 \subset A, A_2 \subset A : A_1 \bigcap A_2 = \varnothing, Conv(A_1) \bigcap Conv(A_2) \neq \varnothing$

Доказательство.

Для плоскости доказательство очевидно: четыре точки можно разбить на два подмножества так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались.

Для $d+2$ точек: они аффинно зависимы $\Rightarrow \exists \alpha_i : \sum \alpha_i = 0, \sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i a_i = 0$. Положительные коэффициенты оставляем с одной стороны знака равенства, а остальные переносим в другую сторону: $\sum_{\alpha_i>0} \alpha_i a_i = \sum_{\alpha_j<0} \alpha_j a_j = x$ – это некоторая точка x. Остается только разделить на сумму положительных коэффициентов. Тогда точка $\frac{x}{\sum_{\alpha_i>0}}$ принадлежит выпуклой оболочке точек a_i, у которых коэффициенты $\alpha_i > 0$, и одновременно выпуклой оболочке точек a_i, у которых коэффициенты $\alpha_i < 0$. □

Теорема 2.4. *Теорема Хелли.*

Пусть $C_1, ..., C_n$ - выпуклые подмножества $R^d, n \geq d+1$ и любые $d+1$ из C_i имеют непустое пересечение. Тогда пересечение всех C_i непусто.

Доказательство.

Пусть $n = d+2$. Для каждого i выберем точку из пересечения $a_i \in \bigcap_{k=1,k\neq i}^{d+2} C_k$. Таких точек набирается $d+2$, обозначим их множество $A = \{a_i\}$.

По лемме Радона $A = A_1 \bigcup A_2 : A_1 \bigcap A_2 = \varnothing, Conv(A_1) \bigcap Conv(A_2) \neq \varnothing$.

Пусть для определенности $A_1 = \{a_1, ..., a_k\}, A_2 = \{a_{k+1}, ..., a_{d+2}\}$ и пусть $x \in Conv(A_1) \bigcap Conv(A_2)$. Докажем, что $\forall i, x \in C_i$, пусть для определенности $i = k+1$.

$x \in Conv(A_1); a_1 \in C_{k+1}, ..., a_k \in C_{k+1} \Rightarrow x \in C_{k+1}$. □

Теорема 2.5. *Теорема отделимости.*

Пусть C, D - выпуклые компактные множества в $R^d, C \bigcap D = \varnothing$. Тогда существует гиперплоскость, строго их разделяющая.

Доказательство.

Рассмотрим всевозможные пары точек: одна точка из C, другая - из D; и измерим длину отрезка, соединяющего их. Функция расстояний определена на компакте, поэтому она достигает минимума, т.е. существует пара точек (x, y), расстояние между которыми наименьшее. Возьмем гиперплоскость, перпендикулярную этому отрезку и проходящую через внутреннюю точку отрезка. Это искомая гиперплоскость. □

Задачи.

1. Пусть K - выпуклый компакт в R^d, точка $p \in K$. Доказать, что существует такая прямая l, что хорда $(l \bigcap K)$ не меньше всех остальных хорд, параллельных l.

2. Под диаметром множества понимаем Sup расстояния между его двумя точками.

Доказать, что $Diam(X) = Diam(Conv(X))$

3*. Пусть C_i $(i = 1, ..., n), n \geq d+2$ - выпуклые множества в пространстве R^d и K - выпуклое множество в R^d.

Известно, что пересечение любых $d+1$ множеств C_i содержит параллельный перенос множества K.

Доказать, что $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ содержит параллельный перенос множества K.

4. A - конечное множество в R^d. Любые 4 точки в нем лежат в выпуклом положении (т.е. являются вершинами некоторого выпуклого четырехугольника).

Доказать, что все точки множества A лежат в выпуклом положении.

5. Плоское множество K называется звездным, если его ядро $KerK \neq \varnothing$, где ядро $KerK = \{x \in R^2 | \forall y \in K$ "видна" из точки x, т.е. отрезок $xy \in K\}$.

а) Доказать, что $KerK$ - выпуклое множество.

б)* **Теорема Красносельского** (задача о галерее):

Пусть множество K ограничено ломаной и любые три точки множества K видны из некоторой точки множества K. Доказать, что тогда K - звездное множество.

6. **Теорема Юнга**:

доказать, что на плоскости всякое конечное множество диаметра ≤ 1 содержится в некотором круге радиуса $1/\sqrt{3}$.

E-mail address: marinakn@mail.ru