ЛЕММА ФАРКАСА. ТЕОРЕМА БОРСУКА-УЛАМА (НАЧАЛО)

записано Князевой М.

Определение 1.1. Вектор $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d)0$ положительный, если $x_1 > 0, ..., x_d > 0$. Аналогично определяются вектора $< 0, \geq 0, \leq 0$.

Лемма 1.2. Фаркаса *(она важна для задач линейного программирования)*

Пусть A — матрица $n \times d$. Тогда выполняется одно и только одно из следующих условий:

(1) *система $A\boldsymbol{x} = 0$ имеет нетривиальное решение $x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$;*
(2) $\exists y \in \mathbb{R}^d : y^T A < 0$.

Доказательство.

Разделим матрицу A на столбики $A = \left(\begin{array}{c} \\ a_1 \\ \\ \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \\ ... \\ \\ \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \\ a_n \\ \\ \end{array}\right)$. Это вектора $a_i \in \mathbb{R}^d$ (их мы идентифицируем с точками). Рассмотрим выпуклую оболочку множества этих точек $Conv(\{a_1, ..., a_n\})$.

Возможны только два альтернативных случая:

1) начало координат $O \in Conv(\{a_1, ..., a_n\})$.

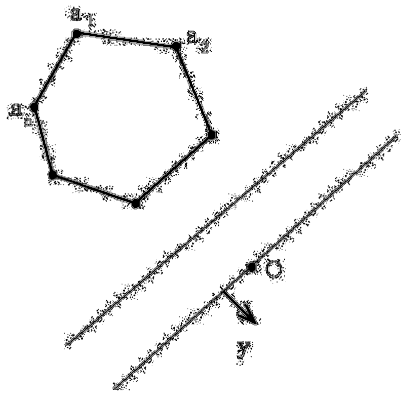
Следовательно, $0 = \sum x_i a_i, \sum x_i = 1, x_i \geq 0$, что дает утверждение 1 леммы.

Обратно, если выполнено утверждение 1, то $0 = \sum x_i a_i, \sum x_i = 1, x_i \geq 0$ для некоторого неотрицательного $\mathbf{x}$.

Домножая $\mathbf{x}$ на константу, легко добиться $1 = \sum x_i$, что означает $O \in Conv(\{a_1, ..., a_n\})$.

2) точка O начала координат не принадлежит $Conv(\{a_1, ..., a_n\})$. Покажем, что это условие равносильно условию 2. По теореме отделимости существует гиперплоскость, разделяющая $Conv(\{a_1, ..., a_n\})$ и точку 0. В качестве y возьмем вектор, ортогональный этой гиперплоскости и направим его так, как показано на рисунке. Это гарантирует, что для всех a_i скалярное произведение (a_i, y) будет отрицательным. Откуда следует утверждение 2 леммы.

Рисунок 1.3.



□

Теорема 1.4. ***Теорема Борсука-Улама I*** *(слабая формулировка)*

Пусть S^n *— n-мерная сфера в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *с радиусом 1 и центром в начале координат. И пусть* $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ *– непрерывное отображение. Тогда* $\exists x \in S^n : f(x) = f(-x)$.

Говорим, что "f склеивает антиподы". □

Теорема 1.5. ***Теорема Борсука-Улама II*** *(сильная формулировка)*

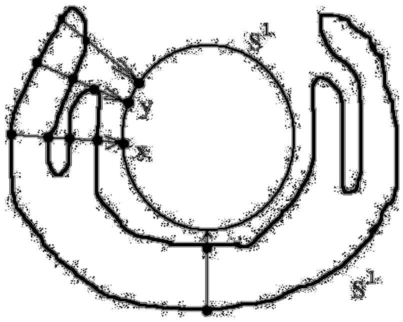
Пусть S^n *— n-мерная сфера в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *с радиусом 1 и центром в начале координат. И пусть* $g : S^n \to S^n$ *– непрерывное отображение, которое нечетно, т.е.* $g(-x) = -g(x)$. *Тогда отображение* g *имеет нечетную степень.* □

Определение 1.6. **Степенью** отображения g называется число элементов в прообразе прообразов общей точки x. (На рисунке точка y – не общая.)

$deg\ g = \sharp(g^{-1}(x)$

Мы будем считать, что $deg\ g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т.е. учитывается только четность.

Рисунок 1.7.



Предложение 1.8.

- *Степень отображения не зависит от выбора общей точки.*
- *Степень отображения не меняется при непрерывных деформациях.* □

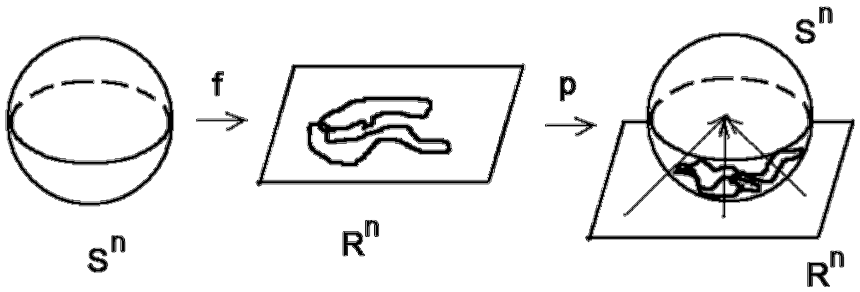
Лемма 1.9. *Теорема Борсука-Улама II влечет теорему Борсука-Улама I.*

Доказательство (от противного).

Пусть f не склеивает никакие антиподы. Построим такое отображение $g : S^n \to S^n$, которое будет четным (т.е. получим противоречие).

Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — не склеивает антиподы. Рассмотрим отображение $p : \mathbb{R}^n \to S^n$, которое проецирует $p : \mathbb{R}^n$ на нижнюю полусферу.

Рисунок 1.10.



Рассмотрим отображение $\bar{g} : S^n \to S^n, \bar{g} = p \circ f$. Его степень $deg\ \bar{g} = 0$, т.к. например прообраз "северного полюса" сферы S^n пуст.

Рассмотрим на сфере S^n антиподальные точки x и $-x$. Т.к. f не склеивает антиподы, $\bar{g}(x) \neq \bar{g}(-x)$. Будем двигать эти точки по дуге, соединяющей их, в разные стороны с постоянной скоростью так, чтобы за время 1 они стали антиподами.

Эту процедуру проделаем сразу со всеми точками совокупности.

При этом близкие точки двигаются по близким траекториям и с близкими скоростями. Таким образом, это непрерывные деформации отображения $\bar{g}$ в некоторое нечетное отображение g степени 0.

Получено противоречие. □

E-mail address: `marinakn@mail.ru`