ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БОРСУКА-УЛАМА

записано Князевой М.

Введем некоторые дополнительные понятия.

Определение 3.1. *Вещественным проективным пространством* RP^n называем множество неупорядоченных пар антиподальных точек сферы: $\mathbb{R}P^n = \{(x, -x) \mid x \in S^n\}$.

Т.е. проективное пространство получаем при склеивании каждых двух антиподальных точек сферы в одну. При этом получается объект сложной топологической формы.

В условиях теоремы Борсука-Улама непрерывное отображение $g : S^n \to S^n$ нечетно: $g(-x) = -g(x)$, т.е. пару антиподальных точек переводит в другую пару антиподальных точек. Эти пары антиподальных точек можно рассматривать как элементы проективных пространств. Поэтому отображение g порождает непрерывное отображение $\tilde{g} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$.

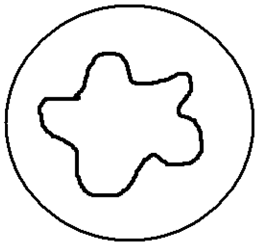
Замечание 3.2. *$deg\ \tilde{g} = deg\ g$*

Доказательство.
Отображение $\tilde{g}$ переводит элемент y (пару y и $-y$) в элемент x (в пару x и $-x$). Степень $\tilde{g}$ — это число пар антиподальных точек, переходящих в x (в пару x и $-x$). Это в точности степень отображения g. $\square$

Докажем теорему только для $\mathbb{R}P^2$.
Введем понятие цикла.

Определение 3.3. *Циклом в S^2 или $\mathbb{R}P^2$* (см. рис.) называется непрерывное отображение окружности в сферу S^2 или в $\mathbb{R}P^2$.

Рисунок 3.4.



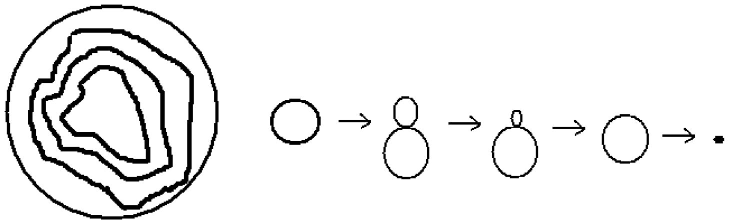
Отображение, переводящее окружность в точку, тоже является циклом. Такой цикл называется *нулевым.*

Рисуем образы отображения цикла. Нужно иметь ввиду, что при таком отображении образ может проходиться не один, а несколько раз.

Определение 3.5. Циклы h_1, h_2 называются *гомотопными* (*эквивалентными*), если они отличаются на непрерывную деформацию.

Например, исходный цикл на рисунке 3.6 гомотопен нулевому.

Рисунок 3.6.



Циклы, которые можно стянуть в точку, называются (*стягиваемыми*). Циклы, которые не гомотопны нулевому, называются (*нестягиваемыми*).

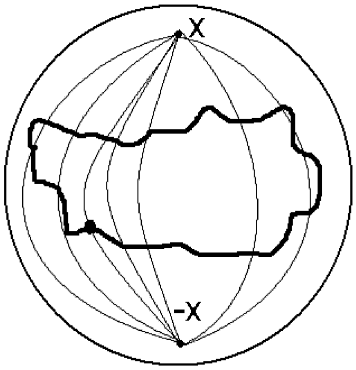
Замечание 3.7. На сфере S^2 есть только один класс эквивалентности циклов.

Или: любой цикл на сфере S^2 гомотопен нулевому.

Доказательство.

Рассмотрим цикл h на сфере и точку $x \in S^2$, не лежащую на образе цикла.

Рисунок 3.8.



Из точки x стягиваем (заставляем равномерно двигаться) все точки цикла в антиподальную точку $-x$. □

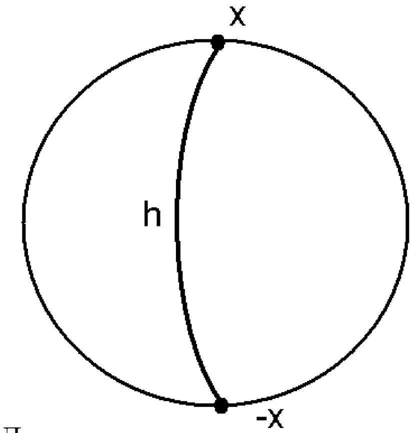
Замечание 3.9. На проективной плоскости RP^2 есть циклы, которые невозможно стянуть в точку (нестягиваемые).

Доказательство.

Цикл можно понимать как некоторый путь, который заканчивается там же, где начался.

Так как в проективном пространстве антиподальные точки совпадают, то путь h из точки x в точку $-x$, изображенный на рисунке, есть цикл. Покажем, что он нестягиваемый.

Рисунок 3.10.



Для этого введем понятие индекса пересечения циклов.

Определение 3.11. Для циклов h_1 и h_2 *индексом пересечения* называется $i(h_1, h_2) := \sharp(Imh_1 \bigcap Imh_2) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

В этом определении мы считаем, что циклы находятся в общем положении (т.е. не рассматриваем случаи касания циклов — непрерывными деформациями от таких случаев можно перейти к общим). Если цикл дважды проходит через точку пересечения, то эту точку пересечения нужно считать дважды (или же деформацией расшевелить цикл, избавившись от кратных точек в пересечении).

Таким образом,

(1) при непрерывных деформациях циклов их индекс пересечения не меняется;
(2) следовательно, понятие индекса пересечения циклов определено корректно для классов эквивалентности циклов (т.е. не зависит от выбора представилтеля класса).

Лемма 3.12.
- *Пусть h_1 и h_2 – циклы, h_1 - стягиваемый. Тогда $i(h_1, h_2) = 0$.*
- *Если $i(h_1, h_2) = 1$, то циклы h_1 и h_2 нестягиваемые.*
- *Цикл h с рисунка 1.10 нестягиваемый.*

Для доказательства первого факта стянем h_1 в точку, не лежащую на образе h_2, и вычислим их индекс пересечения по формуле.

Второй факт — следствие первого.

Третий факт. Рассмотрим циклы h_1 и h_2, соединяющие антиподы (как цикл h, см. рис. 3.10). Их индекс пересечеия равен 1. Далее воспользуемся фактом 2. □

Предложение 3.13. *В $\mathbb{R}P^2$ есть два класса эквивалентности циклов: нулевой и нестягиваемый (класс цикла h).*

Доказательство.

Пусть есть цикл в $\mathbb{R}P^2$. Его можно поднять на S^2 как путь, начинающийся в одной из антиподальных точек x на S^2 (пара этих антиподальных точек x и $-x$ на сфере дает точку проективной плоскости, в которой начинается и заканчивается цикл). При этом есть две возможности:

- на сфере путь возвращается в ту же точку x — тогда имеем стягиваемый цикл. Действительно, цикл можно стянуть в точку на сфере, значит образ этой деформации на $\mathbb{R}P^2$ стянет в точку исходный цикл.
- на сфере путь заканчивается в точке $-x$ — тогда имеем нестягиваемый цикл.Его можно продеформировать в h (примерно так же, как в замечании 3.7).

□

Перейдем теперь к доказательству теоремы Борсука-Улама II.

Имеем непрерывное нечетное отображение $\tilde{g} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$. Требуется доказать, что $deg\ \tilde{g} \equiv 1 (mod\ 2)$.

Заметим, что $\tilde{g}$ переводит нестягиваемые циклы в нестягиваемые (в силу нечетности).

Возьмем нестягиваемые циклы h и k в $\mathbb{R}P^2$. (Удобно представлять h лежащим в первом $\mathbb{R}P^2$, а k во втором).

Справедливо, что $i(\tilde{g}(h), k) = i(\tilde{g}^{-1}(k), h)$.

Так как k – нестягиваемый и $\tilde{g}(h)$ – нестягиваемый (как образ нестягиваемого цикла), то имеем: $i(\tilde{g}(h), k) = 1$. Следовательно, $\tilde{g}^{-1}(k)$ нестягиваем.

Мы доказали, что прообраз нестягиваемого цикла нестягиваем.

Теперь рассмотрим общую точку x в образе $\mathbb{R}P^2$. Нужно найти $\sharp(\tilde{g}^{-1}(x))$.

Представим точку x как пересечение двух нестягиваемых циклов $x = k \bigcap h$. Далее, $\tilde{g}^{-1}(x) = \tilde{g}^{-1}(k \bigcap h) = \tilde{g}^{-1}(k) \bigcap \tilde{g}^{-1}(h) = 1$, т.к. прообразы нестягиваемых циклов нестягиваемые.

Т.к. $\tilde{g}^{-1}(x) = 1$, то $\sharp(\tilde{g}^{-1}(x))$ - нечетно. Теорема Борсука-Улама II доказана. $\square$

E-mail address: `marinakn@mail.ru`