ТЕОРЕМА ШНИРЕЛЬМАНА. ТЕОРЕМА "О БУТЕРБРОДЕ С ВЕТЧИНОЙ".

записано Князевой М.

Теорема 5.1. ***(Шнирельмана)***.
Пусть сфера S^n покрыта замкнутыми множествами C_i $(i = 1, ..., n+1)$, т.е. $\bigcup_{i=1}^{n+1} C_i = S^n$.
Тогда $\exists$ C_i, которое содержит две антиподальные точки.

Доказательство.
Зададим функции $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ как расстояния от точки до множеств C_i. В силу замкнутости, если расстояние от точки до множества равно нулю, то точка принадлежит этому множеству. Отображение $f = (f_1, ..., f_n)$ задано на S^n и непрерывно.

По теореме Борсука-Улама I $\exists x_0 : f(x_0) = f(-x_0)$, т.е. найдется такая точка, в которой значения всех функций f_i совпадают.

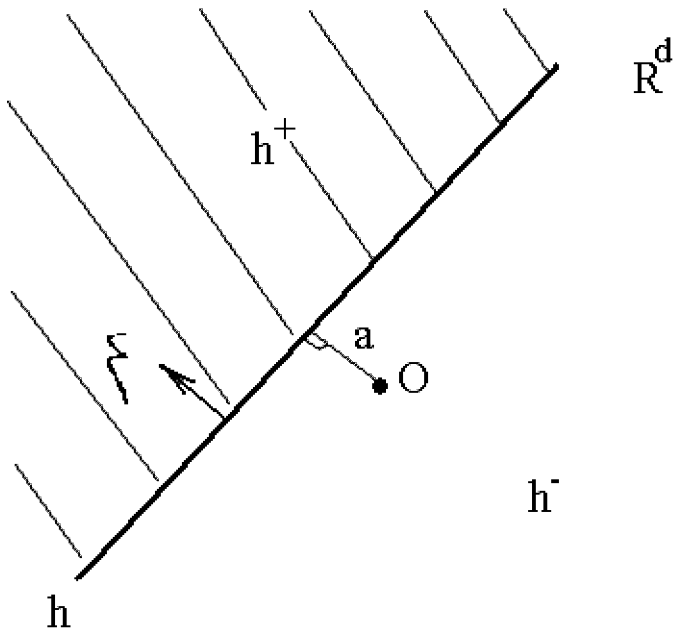
Если в этой точке $f_i(x_0) = 0$, то это значит, что точка x_0 лежит в C_i. А т.к. $f(x_0) = f(-x_0)$, то и антиподальная точка тоже лежит в C_i.

Если же эта точка x_0 не лежит ни на одном из C_i, то это значит, что она принадлежит последнему множеству C_{n+1}. Тогда и антиподальная точка тоже лежит там же. □

Напоминание. В пространстве $\mathbb{R}^d$ гиперплоскость h задается уравнением: $(x, \xi) = a$, где ξ - нормальный вектор гиперплоскости, $a \in \mathbb{R}^d$ – число, определяющее расстояние гиперплоскости до точки начала координат.

Гиперплоскость h делит пространство на два полупространства. Открытые полупространства h^+, h^- задаются неравенствами $(x, \xi) > a, (x, \xi) < a$ соответственно. Замкнутые полупространства $\bar{h}^+, \bar{h}^-$ задаются соответствующими нестрогими неравенствами: $(x, \xi) \geq a, (x, \xi) \leq a$.

Рисунок 5.2.



Теорема 5.3. ***Теорема "о бутерброде с ветчиной"(Ham-Sandwich Theorem).***

Пусть $A_1, ..., A_d$ *— измеримые компакты в* $\mathbb{R}^d$*. Тогда* $\exists h$ *– гиперплоскость, делящая каждое из этих множеств пополам:*

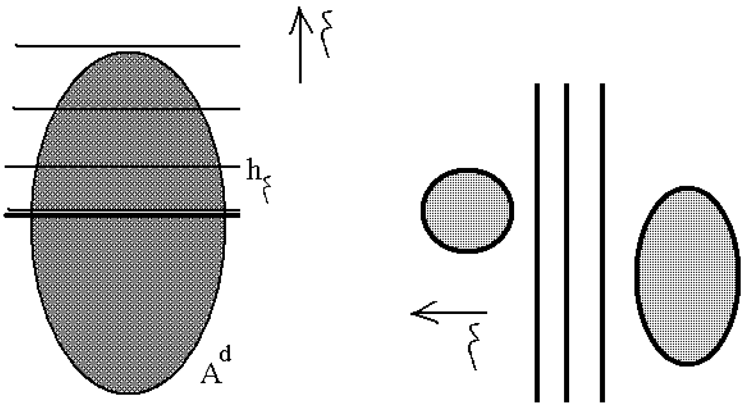
$\forall i = 1, ..., d,\ Vol(h^+ \bigcap A_i) = \frac{1}{2} Vol(A_i)$.

Доказательство.

Рассмотрим множетсво A_d и зафиксируем вектор ξ. Найдется такая гиперплоскость h_ξ с нормалью ξ, которая разделит множество A_d пополам. Чтобы найти ее, достаточно постепенно опускать гиперплоскость и измерять объем верхней и объем нижней частей. Когда они сравняются (в силу непрерывности разности объемов такой момент наступит), нужная гиперплоскость h_ξ найдена (см. рис. 1.7 а).

Такая гиперплоскость может быть не единственной (см., например, рис. 5.4 б для несвязного множества). Выберем гиперплоскость $h_\xi : (x, \xi) = a$, соответствующую среднему значению a. Тогда близким ξ и ξ' (отличающимся на маленький угол) будут соответствовать близкие h_ξ и $h_{\xi'}$, что означает непрерывную зависимость гиперплоскости h_ξ от нормали ξ.

Рисунок 5.4.



а б

Покажем, что существует такое направление ξ^*, что гиперплоскость h_{ξ^*} делит все множества пополам.

Построим отображение $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$. Для $\xi \in S^{d-1}$ (точку ξ отождествляем с радиус-вектором ξ) определяем гиперплоскость (см. выше) h_ξ, которая делит A_d пополам.

Положим $f(\xi) = (Vol(A_1 \bigcap h_\xi^+), Vol(A_2 \bigcap h_\xi^+), ..., Vol(A_d \bigcap h_\xi^+))$. По теореме Борсука-Улама I это отображение склеивает пару антиподов:

$$\exists \xi^* : f(\xi^*) = f(-\xi^*).$$

Это значит, что $Vol(A_i \bigcap h_\xi^+) = Vol(A_i \bigcap h_\xi^-)$, т.е. множества режутся пополам. Поэтому h_{ξ^*} — искомая гиперплоскость.

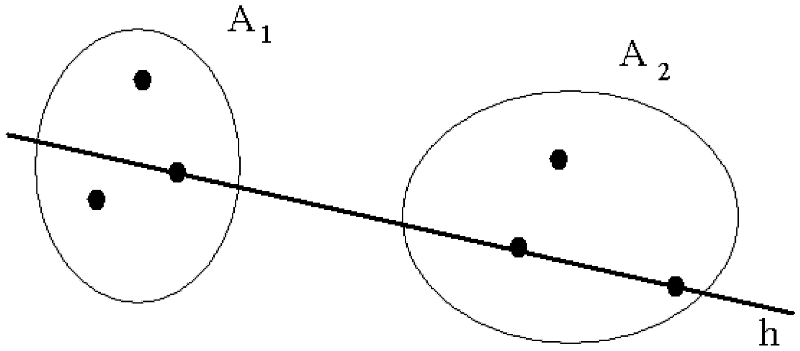
$\square$

Теорема 5.5. ***Дискретная теорема "о бутерброде с ветчиной"(Ham-Sandwich Theorem).***

Пусть $A_1, ..., A_d$ — конечные множества в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\exists h$ – такая гиперплоскость, что в каждом открытом полупространстве h^+, h^- лежат не более, чем $[\frac{\#(A_i)}{2}]$ точек из A_i.

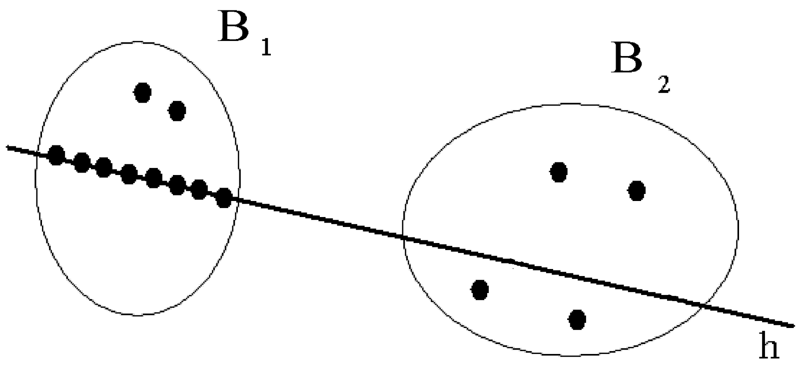
Пример 5.6. *Изображенные плоские трехточечные множества делятся прямой пополам (в смысле дискретной теоремы о бутерброде с ветчиной), т.к. в каждой полуплоскости лежит не более 1 точки из множества A_1 и не более 1 точки из множества A_2.*

Рисунок 5.7.



Пример 5.8. *Изображенные множества тоже делятся прямой пополам, т.к. в каждой полуплоскости лежит не более* $[\frac{9}{2}] = 4$ *точек из множества* B_1 *и не более* $[\frac{4}{2}] = 2$ *точек из множества* B_2.

Рисунок 5.9.



Доказательство дискретной теоремы.

Сведем дискретную теорему к непрерывной.

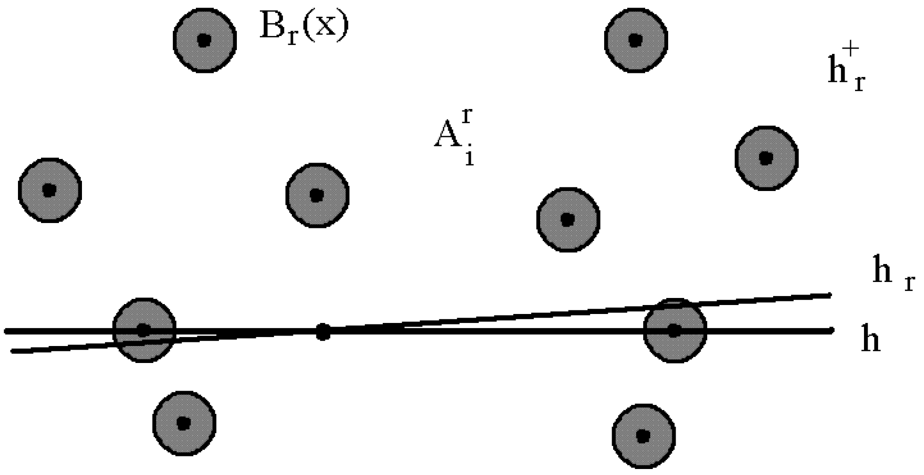
Каждую точку x дискретного множества окружим шаром $B_r(x)$ некоторого радиуса r и рассмотрим новые множества $A_i^r = \bigcup_{x \in A_i} B_r(x)$. По непрерывной теореме имеем: $\exists h_r$ — гиперплоскость, которая делит пополам (в смысле деления пополам объема) каждое из множеств A_i. Деление пополам пока понимается в смысле непрерывной теоремы, т.е. как деление пополам объемов.

Для каждого r определяется своя гиперплоскость h_r. Множество этих гиперплоскостей компактно. Выберем из него сходящуюся последовательность $h_r \to h$ при $r \to 0$. Докажем, что предельная гиперплоскость h — искомая. Выберем некоторое A_i и покажем, что h делит его пополам.

Для малого r гиперплоскости h и h_r близки. Поэтому можно утверждать, что если $x \in A_i, x \notin h$, то шар $B_r(x)$ не пересекает ни h, ни h_r.

Покажем, что справа и слева от гиперплоскости h лежит нужное количество точек множества A_i.

Рисунок 5.10.



Предположим противное: пусть $\#(h_r^+ \bigcap A_i) > [\frac{\#(A_i)}{2}]$. Тогда

$$\frac{Vol(A_i^r)}{2} = Vol(A_i^r \bigcap h_r^+) \geq \#(h^+ \bigcap A_i) \cdot Vol(B_r) \geq ([\frac{\#(A_i)}{2}]+1) \cdot Vol(B_r) > \frac{Vol(A_i)}{2}$$

— противоречие.

$\square$

E-mail address: `marinakn@mail.ru`