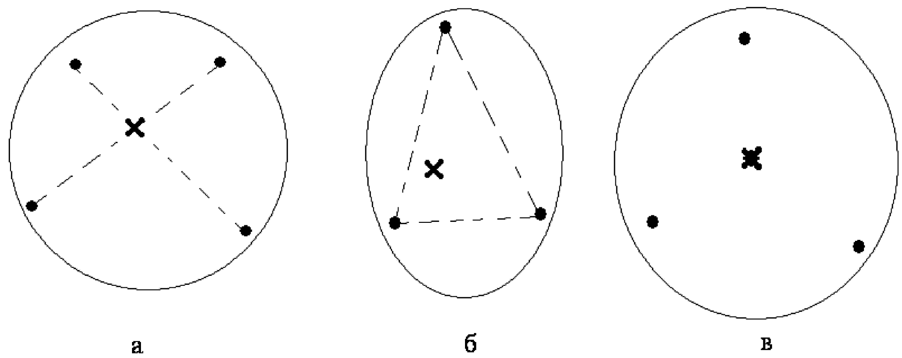
ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТОЧКА МНОЖЕСТВА.

записано Князевой М.

Определение 5.1. Пусть X – конечное множество в $\mathbb{R}^d$, $\#(X) = n$. Точка $x \in \mathbb{R}^d$ называется *центральной точкой* множества X, если любое замкнутое полупространство, содержащее x, содержит не менее $\frac{n}{d+1}$ точек из X (говорим, что пространство содержит "достаточно" точек из X).

Примеры (центральная точка отмечена крестиком)

Рисунок 5.2.



а) Множество из 4 точек в выпуклом положении на плоскости. $\frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$ По определению, в в каждом полупространстве,содержащим центральную точку, должно быть не менее 2 точек множества.

Здесь центральная точка единственна – это пересечение диагоналей четырехугольника.

б) Множество из 3 точек в общем положении на плоскости.

Любая точка треугольника (в том числе на границе) является центральной.

в) Множество из 4 точек на плоскости.

В данном случае центральной является точка множества, лежащая в выпуклой оболочке трех других.

Теорема 5.3. *Любое конечное множество $X \subset \mathbb{R}^d$ имеет хотя бы одну центральную точку.*

Лемма 5.4. *Точка x – центральная точка множества X тогда и только тогда, когда x принадлежит всякому открытому полупространству h^+, для которого $\#(h^+ \bigcap X) > \frac{dn}{d+1}$.*

Доказательство леммы.

"$\Rightarrow$". Пусть x — центральная точка множества X.

Предположим противное: пусть $\exists$ открытое полупространство $h^+ : \#(h^+ \bigcap X) > \frac{dn}{d+1}$ и причем x не принадлежит h^+. Это значит, что в дополнении точек "недостаточно": их $< n - \frac{dn}{d+1} = \frac{dn+n-dn}{d+1} = \frac{n}{d+1}$. Значит, нашлось такое замкнутое полупространство, содержащее x, в котором точек $< \frac{n}{d+1}$. Тогда точка x не может быть центральной. Противоречие.

"$\Leftarrow$". Пусть x принадлежит всякому открытому полупространству h^+, для которого $\#(h^+ \bigcap X) > \frac{dn}{d+1}$. Нужно доказать, что x – центральная точка множества X.

Предположим противное: пусть x — не центральная точка множества X. Тогда $\exists$ замкнутое полупространство, содержащее x, в котором "недостаточно"точек, т.е. их $< \frac{n}{d+1}$. Тогда в дополнении к этому полупространству точек "достаточно": $> n - \frac{n}{d+1} = \frac{dn+n-n}{d+1} = \frac{dn}{d+1}$. Т.о. нашлось открытое полупространство, не содержащее x, в котором точек $> \frac{dn}{d+1}$. Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы.

Используем теорему Хелли. Для этого нужно конечное число выпуклых множеств, любые $d+1$ из которых пересекаются.

Пусть h – такая гиперплоскость, что полупространство $\overline{h}^+$ содержит "достаточно"точек из X. Пусть $C(h) := Conv(\overline{h}^+ \bigcap X)$.

Рассмотрим все такие $C(h)$. Они выпуклые и их конечное число. Покажем, что $\bigcap_h C(h) \neq \varnothing$.

Занумеруем их произвольно: $C_1, ..., C_N$ и покажем (для определенности), что первые $d+1$ из них имеют непустое пересечение.

Рассмотрим $\#(C_1 \bigcap ... \bigcap C_{d+1} \bigcap X) = n - \#(X \setminus \bigcap_{n=1}^{d+1}(C_i \bigcap X)) = n - \sum_{i=1}^{d+1} \#(X \backslash C_i) > n - (d+1)\frac{n}{d+1} = 0$.

Таким образом, любые $d+1$ множеств $C_1, ..., C_N$ пересекаются, поэтому все C_i пересекаются. А это значит, что полупространства $\overline{h}^+$ тоже пересекаются. Любая точка пересечения является центральной. $\square$

Теорема 5.5. ***Центральная трансверсальная теорема.*** *(Без доказательства)*

Пусть и $A_1, ..., A_k$ *— конечные множества в* $\mathbb{R}^d$ *(*$1 \leq k \leq d$*). Тогда существует такая* $(k-1)$*-мерная плоскость* h*, что для любой гиперплоскости* H*, содержащей* h *и* $\forall A_i$ *справедливо:*

$$\#(A_i \bigcap \overline{H}^{\;+}) \geq \#(A_i)\frac{1}{d-k+2}$$

.

(Напоминание. $\overline{H}^{\;+}$ *— замкнутое полупространство, ограниченное гиперплоскостью* H*. Гиперплоскость* H *предполагается ориентированной.)*

□

Для $k = 1$ получаем теорему о существовании средней точки.

Для $k = 2$ получаем теорему "о бутерброде с ветчиной".

E-mail address: marinakn@mail.ru