РАМСЕЕВСКИЙ ПОДХОД. ТЕОРЕМА ERDÖS–SZEKERES

записано Князевой М.

Отступление. Теорема Рамсея

Графом называется пара (V, E), где V – конечное множество (отождествляемое с $\{1, ..., n\}$). Его элементы называются *вершинами.*

E – некоторое множество неупорядоченных пар (различных) вершин. Его элементы называются *ребрами.* В *полном графе* каждая пара вершин является ребром.

Иными словами, мы рассматриваем графы без петель и кратных ребер.

k*-гиперграфом* называется пара (V, E), где V – конечное множество. Его элементы называются *вершинами.*

E – некоторое множество неупорядоченных наборов из k (различных) элементов множества V. Его элементы называются *ребрами.* В *полном графе* каждое k-элементное подмножество такого типа является ребром.

Раскрашенным называется граф, ребра которого окрашены в m цветов.

Теорема 6.1. ***(Теорема Рамсея)*** *Для всяких n, k, m найдется такое число $N = N(n, k, m)$, что любой полный раскрашенный в m цветов k-гиперграф с числом вершин не меньшим N содержит полный одноцветный подграф с n вершинами. (Без док-ва)* □

Определение 6.2. Точки лежат в выпуклом положении, если они являются вершинами некоторого выпуклого многоугольника.

Определение 6.3. Точки из лежат в общем положении, если никакие не лежат в одной плоскости размерности

Лемма 6.4. *Среди любых пяти точек на плоскости, лежащих в общем положении, найдутся четыре, лежащие в выпуклом положении.* □

Лемма 6.5. *Пусть Если каждая четверка точек из лежит в выпуклом положении, то все точки лежит в выпуклом положении.* □

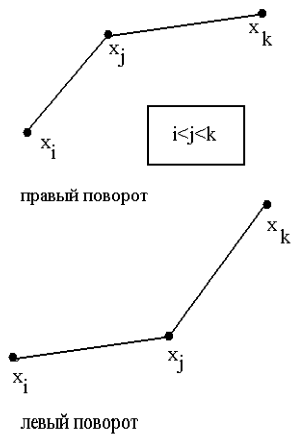
Далее (до конца лекции) мы будем рассматривать только конечные множества X общего положения на плоскости.

Теорема 6.6. ***(Теорема Erdös–Szekeres)*** *Для всякого n найдется такое $N = N(n)$, что всякое множество из N (или более) точек содержит n точек, лежащих в выпуклом положении.*

Доказательство первое. Рамсей. Для $n = 4$ – см. лемма 6.4. Пусть $n > 4$. Рассмотрим полный 4-гиперграф с вершинами в точках множества X. Покрасим его ребро (= четверку точек) в красный цвет, если точки этой четверки лежат в выпуклом положении (иначе - в синий). По т. Рамсея всякое достаточно большое множество точек X имеет одноцветный полный подграф с n вершинами. Но этот подграф не может быть синим (см. опять лемма 6.4).

Доказательство второое. Рамсей. Занумеруем точки X произвольным образом. Рассмотрим полный 3-гиперграф с вершинами в точках множества X. Покрасим его ребро (= тройку точек) в красный цвет, если эта тройка имеет правый поворот (иначе - в синий) (см. рис. 6.7). По т. Рамсея всякое достаточно большое множество точек имеет одноцветный полный подграф с n вершинами. Они лежат в выпуклом положении.

Рисунок 6.7.

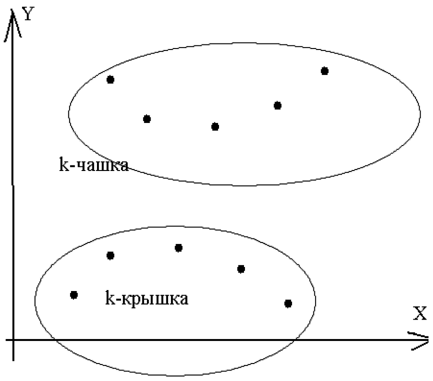


Доказательство третье. Без Рамсея, но зато дающее более точную оценку.

Зафиксируем на плоскости систему координат.

Подмн-во из k элементов $A \subset X$ называется *k-чашкой*, если оно лежит в выпуклом положении и при этом $Conv(A)$ лежит ниже одного из своих ребер. (см. рис. 6.8)

Рисунок 6.8.



Подмн-во из k элементов $A \subset X$ называется k-*крышкой*, если оно лежит в выпуклом положении и при этом $Conv(A)$ лежит выше одного из своих ребер.

Пусть $f(k,l)$ – наименьшее число такое, что в любом $f(k,l)$ -элементном множестве найдется или k-чашка, или l-крышка.

Покажем, что

$f(k,l) \le C_{k+l-4}^{k-2} + 1 := F(k,l) \qquad (*)$

Из этого сразу же следует теорема Erdös–Szekerez: $N(k) \le f(k,k)$. Заметим, что $F(k,l) = F(k-1,l) + F(k,l-1) - 1$.

Докажем (*) по индукции. Для $k \le 2$, $l \le 2$ неравенство очевидно (оно превращается в равенство). Пусть оно доказано для пар $(k, l-1)$ и $(l-1, k)$. Докажем для (k,l). Рассмотрим множествоX из $F = F(k-1,l) + F(k,l-1) - 1$ точки. Если там есть l-крышка, то все хорошо. Пусть там нет l-крышки. Рассмотрим множество

$E := \{p \in X : X$ содержит $k-1$-чашку с концом в точке $p\}$.

Множество $X \setminus E$ не содержит l-крышку и не содержит $k-1$-чашку. Следовательно, по инд. предположению,

$\#(X \setminus E) < F(k-1,l)$.

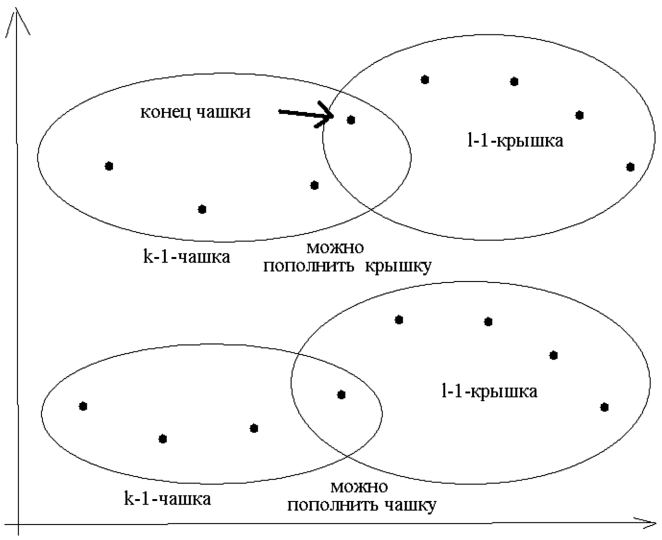
Отсюда

$\#(E) \ge F - F(k-1,l) + 1 = F(k,l-1)$.

Опять же по инд. предположению, либо в E есть k-чашка (и тогда все доказано), либо $l-1$-крышка. Рассмотрим начало этой крышки. Оно является концом некоторой $k-1$-чашки.

Возможны два случая (см. рис. 6.9) – либо эту $k-1$-чашку, либо эту $l-1$-крышку можно пополнить на одну точку. $\square$

Рисунок 6.9.



Теорема 6.10. *Оценка (*) точна. Иными словами, для всяких k, l существует C_{k+l-4}^{k-2}-точечное множество точек $X(k,l)$, не содержащее ни k-чашки, ни l-крышки.*

Доказательство по индукции.

База $k \leq 2$, $l \leq 2$.

Берем одноточечное множество.

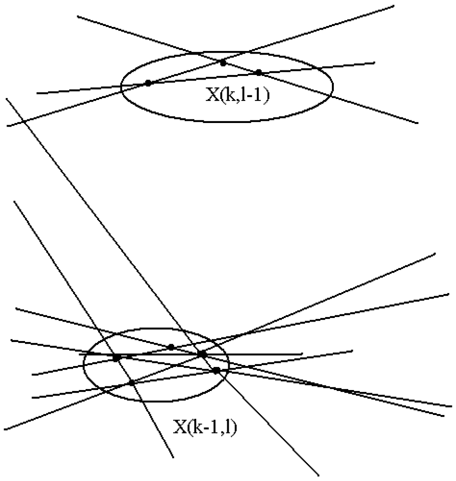
Пусть такие множества построены для пар $(k, l-1)$ и $(l-1, k)$. Построим его для (k, l).

Нужно взять множества $X(k-1, l)$ и $X(k, l-1)$ расположить их на плоскости следующим образом друг относительно друга.

Множество $X(k, l-1)$ должно лежать выше любой прямой, проходящей через две точки множества $X(k-1, l)$. Аналогично, множество $X(k-1, l)$ должно лежать ниже любой прямой, проходящей через две точки множества $X(k, l-1)$.

Легко убедиться, что всякая крышка (или чашка) из объединения пересекается с одной из этих двух частей не более чем по одной точке. $\square$

Рисунок 6.11.



E-mail address: `marinakn@mail.ru`