k-ДЫРКИ. МНОЖЕСТВА ХОРТОНА.

записано Князевой М.

Определение 1.1. Пусть X – конечное множество точек общего положения в $\mathbb{R}^d$ и пусть $Y \subset X$. Множество Y называется k-дыркой в X, если:

- $\#(Y) = k$,
- Y – в выпуклом положении,
- $Conv(Y) \bigcap X = Y$.

То есть дырка – это подмножество, внутри которого точек множества нет. Очевидно, что в любом множестве точек общего положения есть 3-дырка.

Теорема 1.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ достаточно большое множество точек общего положения. Тогда X содержит 5-дырку.*

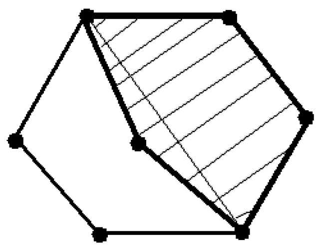
Доказательство.

По теореме Erdos-Szekeres во множестве X есть 6 точек в выпуклом положении. Из всех выпуклых 6-угольников в X выберем тот, внутри которого содержится наименьшее количество точек из X.

Внутри этого 6-угольника могут быть:

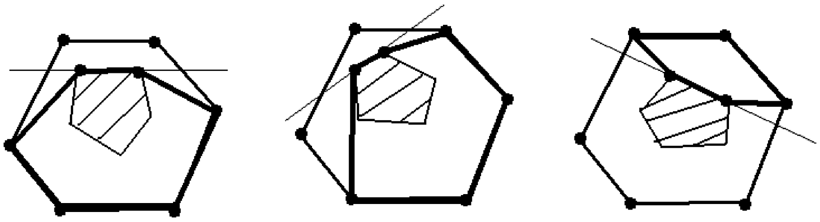
- $\varnothing$ точек из X; тогда теорема доказана (нашлась 6-дырка);
- 1 точка из X; соединив ее с двумя другими вершинами (как показано на рис. 1.3), получим искомую 5-дырку;

Рисунок 1.3.



- больше одной точки из X. Возьмем выпуклую оболочку множества этих "внутренних" точек и выделим следующие случаи (см рис. 1.4)

Рисунок 1.4.



а) б) в)

Случая а) не может быть, т.к. можно получить 6-угольник (выделен жирным), у которого внутри точек меньше, чем у выбранного нами (чтоб противоречит предположению).

Случая б) тоже не может быть (6-угольник выделен жирным).

Случай в) дает искомую 5-дырку (выделена жирным). □

Зафиксируем систему координат xy в $\mathbb{R}^2$.

Определение 1.5. Говорим, что множество X на плоскости лежит высоко над множеством Y (или множество Y лежит низко под множеством X), если

- у всех точек из $X \bigcup Y$ разные x-координаты;
- Y лежит ниже любой прямой, порожденной множеством X;
- X лежит выше любой прямой, порожденной множеством Y.

(Говорим, что прямая порождена множеством, если она соединяет две какие-нибудь точки этого множества.)

Рассмотрим $X \subset \mathbb{R}^d, X = \{x_1, ..., x_n\}$, нумерация введена в порядке возрастания x-координат. Введем множества $X_1 = \{x_1, x_3, x_5, ...\}, X_2 = \{x_2, x_4, x_6, ...\}$, т.е. расщепляем множество X на два множества X_1 и X_2.

Определение 1.6. Множество $H \subset \mathbb{R}^d$ называется множеством Хортона (хортоновым множеством), если $\#(H) = 1$ или при $\#(H) > 1$, множества H_1, H_2 - множества Хортона, причем H_1 лежит высоко над H_2 или наоборот.

Лемма 1.7. $\forall n$ $\exists$ *n-элементное множество Хортона.*

Доказательство.

Докажем по индукции для $n = 2^k$ по k.

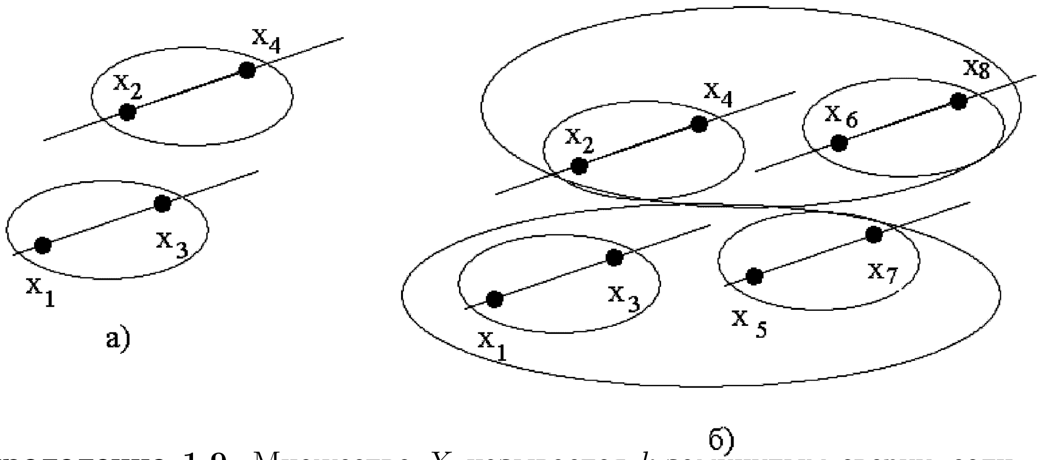
1) $k = 0, n = 1$, тогда любое одноэлементное множество является хортоновым по определению.

2) $k = 1, n = 2$, тогда любое множество из двух элементов с разными x-координатами является хортоновым, т.к. может быть расщеплено на два одноэлементных множества, а они – хортоновы.

3) $k = 2, n = 4$ Построим хортоново множество из 4 элементов (см. рис 1.8 а): взять две точки, поднять достаточно высоко и сдвинуть их вправо.

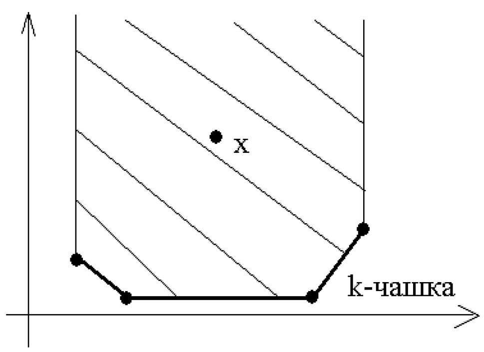
Аналогично строится множество Хортона из 8 элементов (см. рис. 1.8 б) и любого другого четного числа элементов. Заметим, что если из хортонова можества выкинуть несколько последних элементов (любое число элементов, но выкидывать поряд), то омтавшиеся элементы будут снова дават хортоново множество. □

Рисунок 1.8.



Определение 1.9. Множество X называется k-замкнутым сверху, если для любой k-чашки из X существует точка $x \in X$, лежащая над чашкой (см. рис. 1.10).

Рисунок 1.10.



Аналогично определяется k-замкнутость снизу.

Лемма 1.11. *Любое множество Хортона 4-замкнуто сверху (и 4-замкнуто снизу).*

Доказательство.

(По индукции.) Пусть H – хортоново. Тогда оно расщепляется на H_1 и H_2. Пусть для определенности H_1 лежит низко под H_2.

1) Пусть Y – 4-чашка. Если $Y \subset H_1$ или $Y \subset H_2$, то – по индуктивному предположению.

2) Пусть чашка "распределена" между множествами H_1 и H_2. Тогда две нижние точки чашки должны быть в H_1. Над этими точками (то есть в H_2) есть точка с четным номером. Значит, по определению H – 4-замкнуто сверху. $\square$

Теорема 1.12. *В любом множестве Хортона нет 7-дырок.*

Доказательство задано на дом.

E-mail address: `marinakn@mail.ru`