ЦИКЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК

записано Князевой М.

Выпуклым многогранником называем выпуклую оболочку конечного множества точек в $\mathbb{R}^d$.

Грань многогранника K: пусть гиперплоскость h такова, что замкнутое полупространство $\overline{h}_+$ содержит K; тогда $h \bigcap K$ называется гранью многогранника K. В частности, вершины многогранника и его ребра тоже являются его гранями.

Некоторое множество точек – в выпуклом положении, если каждую точку можно отделить от остальных некоторым прямым отрезом.

Несколько выбранных точек из множества точек (вершин выпуклого многогранника K) образуют грань K, если они порождают гиперплоскость, которая оставляет все остальные вершины K по одну от себя сторону.

Найдем многогранники, у которых каждая пара вершин соединена ребром, в пространствах разной размерности.

В $\mathbb{R}^2$ это только треугольник.

Задача. Доказать, что в $\mathbb{R}^3$ это только симплекс.

В $\mathbb{R}^4$ существует многогранник с любым числом вершин, обладающий этим свойством. Построим его явно в $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$$

$$\varphi(x) \to (x, x^2, x^3, ..., x^d).$$

Образ всех вещественных чисел $\varphi(\mathbb{R})$ называется *кривой моментов.*

Определение 8.1. Для $n > d$ возьмем числа $x_1 < x_2 < ... < x_n \in \mathbb{R}$; выпуклая оболочка их образов на кривой моментов называется *циклическим многогранником* :

$$C(n, d) := Conv(\{\varphi(x_i)\}_{i=1}^n) \subset \mathbb{R}^d.$$

Теорема 8.2. (1) *Комбинаторика циклического мноогранника $C(n, d)$ не зависит от конкретного выбора чисел x_i;*

(2) *любые $[\frac{d}{2}]$ вершины циклического мноогранника $C(n, d)$ порождают грань;*

(3) *(следствие из 2) если $d \geq 4$, то любая пара вершин $C(n, d)$ соединена ребром.*

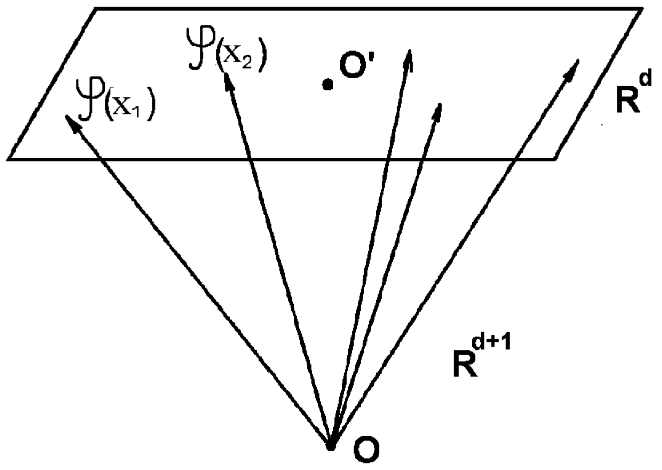
Лемма 8.3. *Любая гиперплоскость в* $\mathbb{R}^d$ *пересекает кривую моментов* $\varphi(\mathbb{R})$ *не более, чем в* d *точках.*

Доказательство леммы.

От противного. Пусть точки $\varphi(x_1), ..., \varphi(x_{d+1})$ принадлежат некоторой гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$. Тогда точки $\varphi(x_1), ..., \varphi(x_{d+1})$ – аффинно зависимы.

Представим пространство $\mathbb{R}^d$ как гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$, заданную уравнением $z = 1$.

Рисунок 8.4.



Тогда новые радиус-вектора $(O\varphi(x_i))$ этих точек – аффинно зависимы. Поэтому соответствующий определитель должен быть равен нулю:

$$0 = det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 \\ x_1 & ... & x_{d+1} \\ x_1^2 & ... & x_{d+1}^2 \\ ... & ... & ... \\ x_1^d & ... & x_{d+1}^d \end{pmatrix} = Det_{VanDM}$$

Это определитель Ван дер Монда. Покажем, что

$$Det_{VanDM} = \prod_{i>j,\ i=1,...,d+1,\ j=1,...,d+1} (x_i - x_j).$$

Действительно, справа и слева стоят многочлены одинаковой степени с одинаковыми корнями.

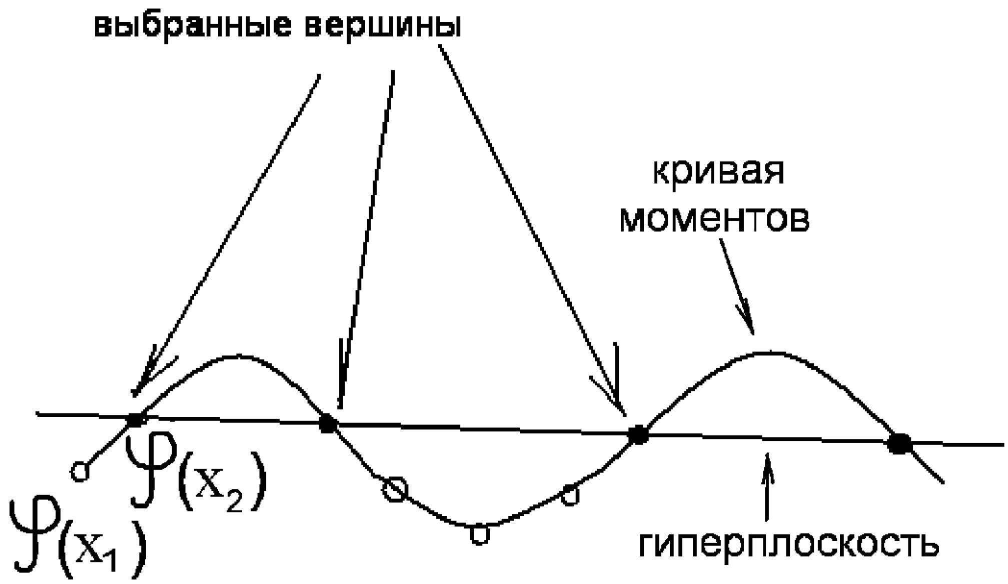
По условию все x_i взяты разными, поэтому $\prod(x_i - x_j) \neq 0$. Получено противоречие. $\square$

Доказательство теоремы.

Отметим точки $\varphi(x_i), i = 1, ..., n$ на кривой моментов. Разберемся, при каких условиях d точек из них образуют гипергрань.

Выберем d точек из $\{\varphi(x_i)\}$ и проведем через них гиперплоскость (на рисунке выбранные точки изображены черными, а остальные – белыми). Если все остальные точки лежат по одну сторону от гиперплоскости, то выбранные d точек образуют грань. На приведенном рисунке выбранные черные точки образуют грань.

Рисунок 8.5.

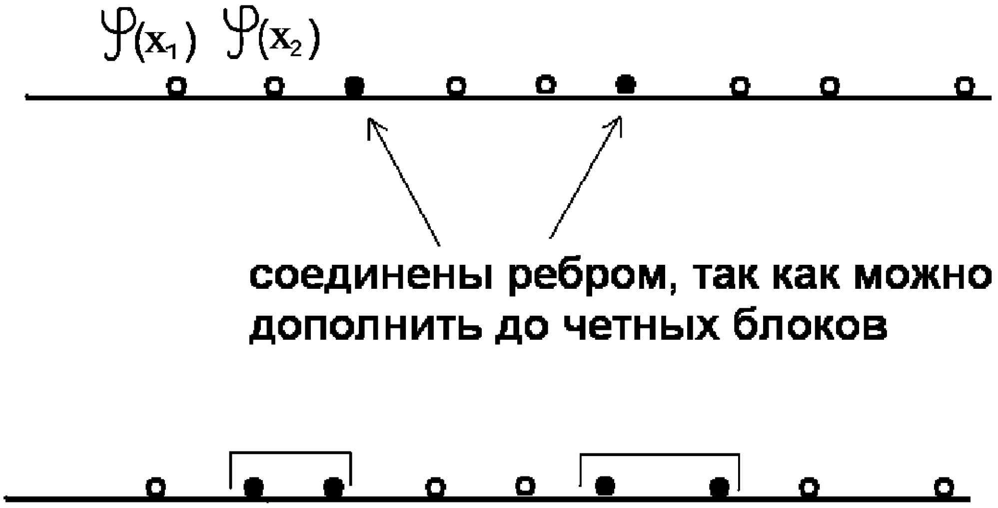


Заметим, что при этом черные точки располагаются на кривой моментов четными блоками. Это так называемое **условие Гейла**. Нечетные блоки могут быть лишь на границе.

Докажем 2. Любые $\frac{d}{2}$ вершин возможно дополнить до d, формируя четные блоки.

Это значит, что для любых $\frac{d}{2}$ вершин найдется грань $C(n, d)$ размерности $d - 1$, содержащая эти вершины. Но все грани размерности $d - 1$ – симплексы.

Рисунок 8.6.



□

E-mail address: marinakn@mail.ru