ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО

записано Князевой М.

Множество точек с целыми координатами $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ называется *стандартной решеткой.*

В пространстве $\mathbb{R}^d$ зафиксируем базис $\{u_1, ..., u_d\}$. Множество $\mathbb{Z}u_1 + ... + \mathbb{Z}u_d$ называется *решеткой относительно базиса* $\{u_1, ..., u_d\}$.

Теорема 9.1. ***Теорема Минковского***

Пусть $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ – стандартная решетка и $C \subset \mathbb{R}^d$ – такое тело, что:

- *C симметрично относительно начала координат O;*
- *C выпукло;*
- *C ограничено;*
- *$Vol(C) > 2^d$.*

Тогда в C обязательно есть решеточная точка (из $\mathbb{Z}^d$), отличная от O.

Докажем следующую лемму.

Лемма 9.2. *Для тела $C' = \{\frac{1}{2}x \mid x \in C\}$ (гомотетично уменьшенного в 2 раза) верно: $\exists v \in \mathbb{Z}^d : C' \bigcap (C' + v) \neq \varnothing$.*

Доказательство леммы. Заметим, что $Vol(C') > 1$. Докажем лемму от противного. Пусть v пробегает все точки решетки $\mathbb{Z}^d$, лежащие в кубе K размером $N \times N \times ... \times N$. Будем рассматривать параллельные переносы тела C' на эти вектора, т.е. суммы вида $(C' + v)$.

Некоторые из $(C' + v)$ частично "вылезают" из куба. Далее, с одной стороны, $Vol(K) = N^d$. С другой стороны объем куба больше, чем сумма объемов внутренних множеств минус сумма объемов "вылезающих" из куба множеств: $Vol(K) > Vol(C') \cdot (N^d + 1) - O(N^{d-1}))$.

Получаем $N^d > 1 \cdot (N^d + 1) - O(N^{d-1}))$, и при $N \to \infty$ получаем противоречие. □

Доказательство теоремы.

Пусть точка $x \in C',\ x + v \in C'$.

Из симметричности C' следует, что $x + v \in C' \ \Rightarrow -x - v \in C'$.

Из выпуклости C' следует, что отрезок $[x, -x - v] \subset C' \Rightarrow$ его середина тоже лежит в C'. А это значит, что $\frac{x-x-v}{2} = \frac{v}{2} \in C' \Rightarrow -v \in C$. □

Следствие 9.3. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^d$ – решетка относительно базиса $\{u_1, ..., u_d\}$ и $C \subset \mathbb{R}^d$ – такое тело, что:*

- *C симметрично относительно O;*
- *C выпукло;*

- *C ограничено;*
- *$Vol(C) > 2^d \cdot det(u_1, ..., u_n)$.*

Тогда в C обязательно есть решеточная точка из L относительно выбранного базиса, отличная от O.

Доказательство.

Достаточно рассмотреть аффинное преобразование φ, которое переводит выбранный базис $\{u_1, ..., u_d\}$ в обычный. $\square$

Дробь вида $\frac{m}{n}$ везде далее считаем такой, что $m, n \in \mathbb{Z}$, и эта дробь несократима.

Теорема 9.4. *Пусть число $\alpha \in [0, 1]$ и пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда*

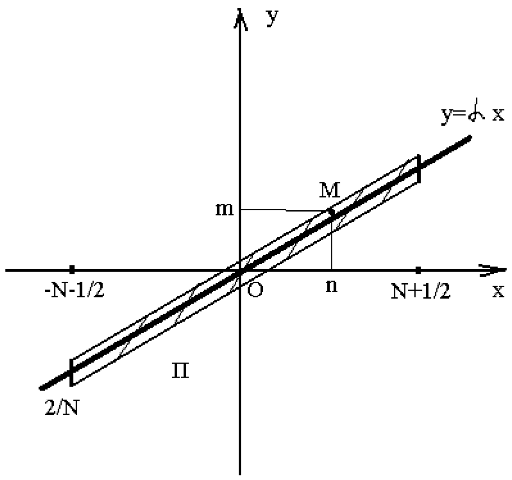
$$\exists \frac{m}{n} : |\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n \cdot N},$$

где $n \leq N$.

Доказательство.

Рассмотрим прямую $y = \alpha x$. Образуем "полоску" Π, ограниченную $x = N + \frac{1}{2}$ и $x = -N - \frac{1}{2}$, с высотой $\frac{2}{N}$.

Рисунок 9.5.



Заметим, что $Vol(\Pi) = \frac{2}{N} \cdot (N + 1) = 4 + \frac{2}{N} > 4$. Таким образом, для Π выполняются все условия теоремы Минковского. Значит, внутри Π содержится решеточная точка M.

Пусть ее координаты (n, m). Тогда

$$M \in \Pi \Leftrightarrow |m - \alpha n| < \frac{1}{N} \Leftrightarrow |\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{nN}. \quad \square$$

E-mail address: marinakn@mail.ru