ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИИ 2

Задача 2.1. *Докажите, что трехмерный шар нельзя разбить на 3 части меньшего диаметра.*

Задача 2.2. *Докажите, что две нечетные непрерывные функции заданые на S^2 имеют общий ноль.*

Задача 2.3. *Теорема Шнирельмана.*

Сфера S^d покрыта замкнутыми множествами C_i, $i = 1, ..., d+1$. Докажите, что одно из множеств C_i содержит две антиподальные точки.

Указание. Введите функции f_i, значения которых равны расстоянию до C_i.

Задача 2.4. *Теорема о бутерброде с ветчиной.*

$A_1, ..., A_d \subset \mathbb{R}^d$ *– компакты. Докажите, что существует гиперплоскость, разрезающая каждое из на две равные по объему части.*

Задача 2.5. *Теорема о бутерброде с ветчиной. Дискретный вариант.*

Пусть $A_1, ..., A_d \subset \mathbb{R}^d$ – конечные множества точек. Докажите, что существует такая гиперплоскость, что для любого i каждое из открытых полупространств, ограниченных ею, содержит не более чем $[\sharp(A_i)/2]$ точек множества A_i.

Задача 2.6. *Версия леммы Фаркаса.*

Пусть A – матрица $d \times n$, пусть $b \in \mathbb{R}^d$.

Докажите, что $Ax = b$ имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда всякий $y \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющий $y^T A \geq 0$, также удовлетворяет $y^T b \geq 0$.