

ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИИ 9

Задача 9.1. Если $C \subset \mathbb{R}^d$ выпукло, симметрично относительно начала координат O , и $\text{Vol}(C) > k2^d$, то C содержит по крайней мере k решеточных точек.

Задача 9.2. Пусть тело $C \subset \mathbb{R}^d$ таково, что $\text{Vol}(C) > k$ (выпуклости и симметричности нет). Докажите, что найдутся k точек x_1, \dots, x_k таких, что $\forall i, j \quad x_i - x_j \in \mathbb{Z}^d$.

Задача 9.3. Покажите, что требование ограниченности в условии *m*. Минковского — лишнее.

Задача 9.4. Покажите, что для любого иррационального α найдется бесконечно много пар целых чисел (m, n) таких, что $|\alpha - m/n| < \frac{1}{n^2}$.

Задача 9.5. Покажите, что для любого иррационального числа α степени k (k — это степень минимального многочлена, обнуляющего α), найдется лишь конечное число пар целых чисел (m, n) таких, что $|\alpha - m/n| < \frac{1}{n^{k+1}}$.

Отсюда следствие: число $\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$ — трансцендентно (докажите!).

Задача 9.6. Сформулируйте и докажите теорему об одновременном приближении d вещественных чисел рациональными с общим знаменателем.