# ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

## 1. Лекция 10

Пусть $\Sigma$ - веер, $\sigma$ – конус из $\Sigma$.

Обозначим через $\pi$ проекцию на $\sigma^{\perp}$

$st(\sigma) = \sigma' \in \Sigma : \sigma$ – грань $\sigma'$. Рассмотрим новый веер $\Sigma/\sigma = \{\pi(\sigma') : \sigma' \in st(\sigma, \Sigma)\}$.

$X_{\Sigma/\sigma}$ вкладывается в многообразие $X_{\Sigma}$ как торическое многообразие, инвариантное при действии тора.

Это так, поскольку каждый конус из $\Sigma/\sigma$ является гранью $\breve{\sigma}'$ для некоторого конуса $\sigma' \in st(\sigma)$.

А мы знаем, что есть вложение $\varphi : X_{\tau} \to X_{\breve{\sigma}}$. Эти вложения согласованы со склейкой карт.

**Виртуальные многогранники.** Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$.

(Выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка непустого конечного множества точек.)

**Определение 1.1.** Пусть $K, L$ - многогранники. Их *суммой Минковского* называется $K \otimes L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in L\}$.

(мы отождествляем точки пространства с их радиус-векторами.)

Сумма Минковского многогранников - тоже выпуклый многогранник (что легче всего объяснить перейдя к опорным функциям - см. ниже).

Вот простые свойства.

- Операция $\otimes$ превращает $\mathcal{P}$ в полугруппу с единицей. Роль единичного элемента играет точка O (начало координат).
- Обратимыми элементами в полугруппе являются лишь одноточечные многогранники.
- Замена начала координат меняет сумму Минковского на сдвиг.
- При паралельных переносах слагаемых сумма тоже параллельно сдвигается.

Элементарные примеры.

- Куб - сумма Минковского трех отрезков.
- Треугольная призма - сумма Минковского треугольника и отрезка
- Полезное упражнение - нарисуйте два треугольника (с непараллельными сторонами) и их сумму Минковского.

### Опорная функция

**Определение 1.2.** Пусть $K$ - выпуклый многогранник. Его *опорная функция* $h_K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
по определению равна
$h_K(\mathbf{x}) = max_{\mathbf{y}\in K}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
(скобки обозначают скалярное произведение)

- Опорная функция многогранника, состоящего из одной точки - линейная функция. И наоборот, всякая линейная функция $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ является опорной функцией некоторой точки (очевидным образом восстанавливаемой).
- Для выпуклого многогранника $K$ его опорная функция
  -непрерывна
  -положительно однородна : для $\lambda \geq 0$ справедливо $h_K(\lambda\mathbf{x}) = \lambda h_K(\mathbf{x})$
  - выпукла вниз
  - $h_{K\otimes L} = h_K + h_L$
  - кусочно-линейна.

  Поясним последнее. Легко видеть, что для фиксированного $\mathbf{x}$ максимум скалярного произведения достигается на некоторой вершине многогранника $K$. Таким образом, все пространство $\mathbb{R}^3$ разбито на области (соответствующие вершинам многогранника), такие, что для каждой области максимум скалярного произведения достигается на некоторой вершине (скажем, $\mathbf{a}$ ). Следовательно, в этой области $h_K$ равна опорной функции точки $\mathbf{a}$, т. е. некоторой линейной функции.

  Области разбиения - многогранные конусы с вершиной в начале координат (это следует из положительной однородности $h_K$).

  Это разбиение называется *веером* многогранника $K$.
- И наоборот, всякая функция $h$, обладающая вышеперечисленными свойствами - опорная функция некоторого выпуклого многогранника. Этот многогранник легко восстановить, т. к. линейные функции, из которых "склеена"$h$, дают вершины искомого многогранника.

**Следствие.**

Полугруппа $\mathcal{P}$ изоморфна полугруппе функций $\mathcal{F}$, заданных на $\mathbb{R}^3$, которые
-выпуклы
-непрерывны
- кусочно-линейны относительно некоторого разбиения пространства на конуса с вершиной в O (= относительно некоторого веера).

Полугрупповая операция - поточечное сложение.

### Сферический веер выпуклого многогранника

Удобно рисовать не сам веер, а его пересечение с единичной сферой с центром в начале координат. Получается некоторое разбиение сферы на сферические многоугольники. Комбинаторно эта сферическая картинка двойственна исходному многограннику.

Построить веер выпуклого многогранника просто:

- отметить на единичной сфере концы внешних нормалей граней

-соединить кратчайшей геодезической те пары полученных точек, для которых соответствуюшие грани делят ребро.

**Виртуальные многогранники**

В полугруппе $\mathcal{P}$ выполняется закон сокращения : $K \otimes A = L \otimes A \Rightarrow K = L$. (это так, поскольку закон сокращения выполняется в изоморфной полугруппе функций $\mathcal{F}$).

Следовательно, $\mathcal{P}$ вкладывается в свою группу Гротендика $\mathcal{P}^*$ - группу формальных выражений вида $K \otimes L^{-1}$ где $K, L$ - выпуклые многогранники.

Она называется *группой виртуальных многогранников.*

Заметим, что группа $\mathcal{P}^*$ изоморфна группе $\mathcal{F}^*$, т. е. группе непрерывных кусочно-линейных относительно некоторого веера функций, заданых на $\mathbb{R}^3$.

Таким образом, у нас уже имеется хорошо определенное понятие опорной функции виртуального многогранника. (= мы умеем описывать виртуальные многогранники на двойственном языке опорных функций).

**Гипреболические виртуальные многогранники**

Пусть $K$ - виртуальный многогранник, $h$ - его опорная функция. Рассмотрим плоскость $e$ в $\mathbb{R}^3$ и сужение функции $h$ на плоскость $e$.

Обозначим через $\Gamma_e(h)$ график этоко сужения. Это некоторая (двумерная) поверхность в трехмерном пространстве.

Простой факт:

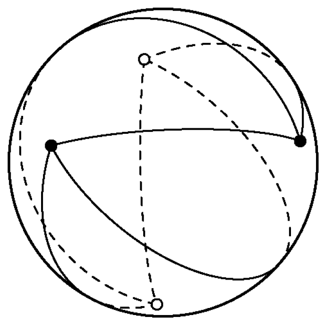
$K$ - выпуклый многогранник тогда и только тогда, когда поверхность $\Gamma_e(h))$ выпукла вниз для любой плоскости $e$.

**Определение 1.3.** Пусть $F$ - поверхность (без края), $\mathbf{x} \in F$ . Точка $\mathbf{x}$ называется *седловой*, если любая плоскость, содержащая $\mathbf{x}$ , локально пересекает $F$ более чем в одной точке.

**Определение 1.4.** Пусть $K$ - выпуклый многогранник. Он называется гиперболическим, если поверхность $\Gamma_e(h)$ - седловая для любой плоскости $e$.

- Плоскость - седловая поверхность.
- У многогранной поверхности неседловыми точками могут быть только вершины.
- Не бывает замкнутых многогранных седловых поверхностей в $R^3$.

Первый содержательный пример гиперболического многогранника - гиперболический тетраедр. Он гиперболичен в силу следующей леммы.



**Лемма 1.5.** *Пусть сферический веер виртуального многогранника $K$ таков, что для каждой его вершины один из прилегающих углов больше $\pi$. (См. напримеер веер гиперболического тетраедра.) Тогда $K$ - гиперболический многогранник.*

Доказательство. Воспользуемся определением. Сужение опорной функции $h_K$ - функция, которая кусочно линейна относительно некоторого разбиения плоскости $e$ с тем же свойством.

*E-mail address*: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net