ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 11

У нас было понятие торического морфизма торических **аффинных** многообразий.

Введем понятие торического морфизма торических многообразий.

Теорема-определение.

Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – линейное отображение, $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma' \subset \mathbb{R}^k$ – два веера. Причем выполнено:

$\forall \sigma \in \Sigma \; \exists \tau \in \Sigma' \; : \; L(\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \subset (\tau \cap \mathbb{Z}^k)$.

Тогда существует морфизм алгебраических многообразий $\Phi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$, сужение которого на каждую стандартную аффинную карту есть торический морфизм аффинных многообразий, порожденный L.

(Иначе говоря, если торические морфизмы карт порождены общим линейным отображением, то морфизмы можно склеить в морфизм всего многообразия.)

Пусть Φ – торический морфизм, α– гомоморфизм групп.

$$\begin{array}{ccc} X_\Sigma & \Phi \to & X_{\Sigma'} \\ \smile & & \smile \\ T & \alpha \to & T' \end{array}$$

Φ *эквивариантен* относительно α, если

$$\Phi(tx) = \alpha(t)\Phi(x).$$

Теорема

Каждый торический морфизм эквивариантен относительно некоторого α.

Теорема Пусть $\Sigma' \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma'' \subset \mathbb{R}^k$ – два веера, лежащие в разных пространствах Обозначим $\Sigma' \times \Sigma'' = \{\sigma + \tau : \sigma \in \Sigma' \; \tau \in \Sigma''\}$ Тогда

$$X_{\Sigma' \times \Sigma''} = X_{\Sigma'} \times X_{\Sigma''}.$$

Пусть $\Sigma' \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma'' \subset \mathbb{R}^n$ – два веера. Обозначим $\Sigma' \cdot \Sigma'' = \{\sigma + \tau : \sigma \in \Sigma', \; \tau \in \Sigma''\}$

Иногда этот объект – веер, иногда нет. В случае, если это веер, он называется джойном двух вееров. (Пример – веер поверхности Хирцебруха).

Теорема

В этих обозначениях, пусть веер Σ' лежит в подпространстве $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, а веер Σ''проецируется однолистно на некоторый веер $\Sigma_0 \subset (\mathbb{R}^k)^\perp$. (основной пример – веер поверхности Хирцебруха).

Тогда (линейное) отображение проекция $\pi : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^k)^\perp$ порождает торический морфизм

$$X_{\Sigma' \cdot \Sigma''} \to X_{\Sigma_0}.$$

При этом $X_{\Sigma' \cdot \Sigma''}$ расслаивается над X_{Σ_0} со слоем равным $X_{\Sigma'}$ Это расслоение

может быть нетривиальным. Например, для поверхности Хирцебруха для $k = 1$ это лист Мебиуса.

Теорема Пусть Σ_K – внешний нормальный веер выпуклого многогранника K.

Тогда инвариантные подмногообразия $X_{\Sigma_{K/\sigma}}$ многообразия X_{Σ_K} находятся в биективном соответствии с гранями K.

При этом включения сохраняются.

E-mail address: `gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net`