

# ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

## 1. ЛЕКЦИЯ 12

**Внешний нормальный веер многогранника: его ипостаси** Пусть  $K$  – выпуклый многогранник. Его внешний нормальный веер  $\Sigma_K$  можно определить следующими эквивалентными способами.

- (1) Области линейности опорной функции  $h_K$ .
- (2) Для каждой грани  $F$  перенесем  $F$  параллельно так, чтобы начало координат  $O$  лежало в относительной внутренней  $tF$ . Совокупность всех  $(\text{pos}(tF))$  составляет  $\Sigma_K$ .

Следствие:

1. многогранник  $K$  и его веер  $\Sigma_K$  комбинаторно двойственны
2. грань многогранника  $F$  ортогональна соответствующему ей конусу  $(\text{pos}(tF))$ . (точнее, ортогональны их аффинные оболочки).
- (3) Два вектора  $x, y$  назовем эквивалентными, если  $K^x = K^y$  (это грани с внешними нормальными  $x$  и  $y$ ).  $\Sigma_K$  - замыкания классов эквивалентности.
- (4) Сферический веер трехмерного многогранника легко построить согласно алгоритму: отмечаем на сфере концы нормалей к граням, соединяем геодезическими отрезками согласно комбинаторике.

### Раздутие точки

Раздутие (неособой точки)  $n$ -мерного многообразия означает замену точки на проективное пространство размерности  $n - 1$ :

Стартуем с  $C^2$ , раздуваем начало координат. По определению, это мн-е, лежащее в

$$C^2 \times CP^1 = (x_1, x_2) \times (\eta_1 : \eta_2)$$

и задаваемое уравнением

$$x_1\eta_2 = x_2\eta_1.$$

### Пример.

На торическом многообразии эквивариантно раздуть можно только неподвижные точки (одноточечные орбиты). Напомним, что они соответствуют конусам веера максимальной размерности.

Раздутие точки соответствует звездному разбиению соответствующего конуса на регулярные конуса.

**Лемма.** Для регулярного конуса  $\sigma$  существует единственное звездное разбиение на регулярные конуса. А именно, пусть  $a_1, \dots, a_n$  – образующие  $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ .

В качестве одномерного конуса, порождающего звездное разбиение, нужно взять  $\text{pos}(a_1 + \dots + a_n)$ .  $\square$

*E-mail address:* `gaiane-panina@rambler.ru`, `gaiane@mail.wpus.net`