ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Панина Г.Ю.

1. Лекция 13

Звездные разбиения Пусть $\mathcal{C}$ - клеточный комплекс, $F \in \mathcal{C}$, $p \in RelintF$. Комплекс

$$s(p,F)C := (C \setminus st(F,\mathcal{C})) \cup p \cdot (\overline{st}(F,C) \setminus st(F,C))$$

называется звездным разбиением. Здесь $st(F,C)$ – звезда (все клетки, для которых F – грань), а

$\overline{st}(F,C) = \{F'' \in \mathcal{C} : \exists F' \quad F'' \subset F' \in st(F,\mathcal{C})\}$ – замыкание звезды (все грани клеток звезды).

Если в качестве комплекса выступает регулярный веер, то его регулярное звездное разбиение – то, для которого $p = a_1 + ... + a_n$ ($a_1, ..., a_n$ – образующие конуса F). При другом выборе p получатся нерегулярные конуса.

Гипотеза. Для двух клеточных комплексов, комбинаторных сфер $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ существует третья $\mathcal{C}''$, получаемая звездными разбиениями как из $\mathcal{C}$, так и из $\mathcal{C}$.

Это верно для полных регулярных вееров в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.1. *Всякий регулярный полный веер в $\mathbb{R}^2$ можно получить цепочкой регулярных звездных разбиений либо из веера для проективной плоскости, либо из веера для поверхности Хирцебруха.*

Эквивариантное сдутие

Пусть Σ – регулярный веер $s(p,\sigma)$ – регулярное звездное разбиение. Тогда $id : s(p,\sigma)\Sigma \to \Sigma$ – морфизм вееров. Он порождает эквивариантный торический морфизм

$$\psi_\sigma : X_{s(p,\sigma)} \to X_\Sigma,$$

называемый эквивариантным сдутием.

Теорема 1.2. *При ψ_σ^{-1} каждая точка $X_{\Sigma/\sigma}$ заменяется на проективное пространство.*

ψ_σ – биекция вне $\psi_\sigma^{-1}(X_{\Sigma/\sigma})$.

Разрешение особенностей

Точка $x \in X_\Sigma$ – неособая, если существует карта X_σ такая, что $x \in X_\sigma; \quad X_\sigma = C^k \times (C^*)^m$.

Остальные точки называются сингулярными.

Лемма 1.3.
- *Для каждой орбиты либо все точки одновременно сингулярны, либо все одновременно неособы.*
- *В большом торе особенностей нет.*

Звездными разбиениями всякий веер Σ можно превратить в регулярный Σ' (это теорема). Соответствующий торический морфизм $\psi : X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$ называется разрешением особенностей.

E-mail address: gaiane-panina@rambler.ru, gaiane@mail.wpus.net